VIPSTUDY.VN × PHYGITAL BOOK 4.0

CHUẨN CẤU TRÚC THI MÁY CBT BỘ GD 2027

ẤN BẢN ĐỘC QUYỀN • CHỐNG IN LẬU BẰNG MÃ KÍCH HOẠT QR

200

TOÁN THỰC TẾ & BẪY ĐÚNG/SAI TRẢ LỜI NGẮN 2027

100 Câu Đúng/Sai Bóc Bẫy Kinh Điển (400 Lệnh Hỏi) • 100 Bài Toán Trả Lời Ngắn 7–10 Điểm

Đón Đầu Kỳ Thi Máy Tính THPT 2027 & Đánh Giá Tư Duy TSA / ĐGNL

1. Bóc Sạch Bẫy Mất 0,5 Điểm Oan

Mỗi bài đều có hộp Cảnh Báo Bẫy 80% học sinh hay dính ở Phần II Đúng/Sai lũy tiến & Phần III Trả lời ngắn.

2. Tích Hợp Phòng Thi Máy CBT 2027

Quét mã QR đầu mỗi chuyên đề để luyện thi trên máy tính, chấm điểm IRT & vẽ Radar lỗ hổng 5 trục tại vipstudy.vn.

3. Gia Sư Socrates 3 Tầng & Giải Chi Tiết

Tách riêng phần Đề bài – Gợi ý Socrates – Hướng dẫn giải chuẩn xác 100%, giúp rèn tư duy độc lập thực thụ.

4. Đón Đầu Xu Thế Á Đông 2027–2030

Bổ sung Chuyên đề Toán Định Nghĩa Mới (Gaokao) & Đọc Vòng Lặp Thuật Toán – Thống kê Dữ liệu (Nhật Bản/TSA).

🔐 QUÉT QR MỞ KHÓA HỆ SINH THÁI PHYGITAL VIPSTUDY.VN

Mỗi cuốn sách chính hãng đi kèm 01 Mã Kích Hoạt duy nhất (tối đa 2 thiết bị) tại trang bìa trong để mở khóa Phòng Thi CBT VIP, Gia sư Socrates AI và kho Micro-Video Bảng Xanh 60s.

PHÒNG THI CBT

KÍCH HOẠT SÁCH

CHỦ BIÊN & BẢN QUYỀN ĐỘC QUYỀN:

THS. NGUYỄN THẾ ANH – CHUYÊN TOÁN

Hệ thống Giáo dục VIPSTUDY • AI Study Hub (Ecopark & Hai Bà Trưng)

Website: vipstudy.vn • thaytheanh.com

Hotline / Zalo: 0986.683.218

LỜI NÓI ĐẦU & THẺ KÍCH HOẠT PHYGITAL 2027

Các em học sinh 2k9, 2k10, quý phụ huynh và quý thầy cô thân mến!

Bước vào giai đoạn **2027 – 2030**, kỳ thi Tốt nghiệp THPT môn Toán và các kỳ thi Đánh giá Tư duy (TSA), Đánh giá Năng lực (HSA/V-ACT) đã thay đổi hoàn toàn bản chất: chuyển sang **thi trực tiếp trên máy tính (CBT)** với cấu trúc **Đúng/Sai tính điểm lũy tiến cực gắt** (sai 1 ý mất ngay 0,5 điểm) và **Trả lời ngắn thực tế** triệt tiêu hoàn toàn học vẹt hay bấm máy Casio.

Cuốn sách Phygital **"Toán Thực Tế & 200 Bẫy Đúng/Sai – Trả Lời Ngắn 2027"** là ấn bản lai công nghệ đầu tiên của Thầy Thế Anh – VIPSTUDY.VN: kết hợp giữa **200 bài toán thực tế tinh tuyển được bóc sạch từng cái bẫy** trên giấy và **Đấu trường Thi Máy CBT + Gia sư Socrates AI 3 tầng** trên hệ thống **vipstudy.vn**.

THẺ KÍCH HOẠT BẢN QUYỀN SÁCH PHYGITAL (CHỐNG IN LẬU)

Quét mã QR bên phải hoặc truy cập **https://vipstudy.vn/kich-hoat-sach/** để nhập Mã bản quyền (in trên tem cào dán tại khung dưới) nhằm mở khóa Phòng thi máy CBT VIP, Gia sư Socrates 3 tầng và kho Micro-Video Bảng Xanh 60s:

```
MÃ KÍCH HOẠT: [ DÁN TEM QR VS27-BOOK-XXXXXX TẠI ĐÂY ]
```

vipstudy.vn/kich-hoat-sach

Hà Nội, năm học 2026 – 2027

THS. NGUYỄN THẾ ANH – VIPSTUDY.VN
Hotline / Zalo: 0986.683.218

MỤC LỤC TỔNG QUÁT (10 CHUYÊN ĐỀ • 200 BÀI TOÁN)

Lời nói đầu & Thẻ Kích Hoạt Phygital QR 1

PHẦN I. 100 BẪY ĐÚNG / SAI THỰC TẾ CHUẨN 2027 (Bài 1 – 100)

Chuyên đề 01: HÀM SỐ, ĐẠO HÀM & TỐI ƯU HÓA KINH TẾ – SẢN XUẤT *(Bài 1–20)* **4**

↳ Đề bài tự luyện (4) • Bóc bẫy & Giải chi tiết (13)

Chuyên đề 02: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN ỨNG DỤNG CHUYỂN ĐỘNG & KỸ THUẬT *(Bài 21–40)* **33**

↳ Đề bài tự luyện (33) • Bóc bẫy & Giải chi tiết (42)

Chuyên đề 03: XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN & CÔNG THỨC BAYES TRONG Y TẾ – AI – CÔNG NGHIỆP *(Bài 41–60)* **62**

↳ Đề bài tự luyện (63) • Bóc bẫy & Giải chi tiết (70)

Chuyên đề 04: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN OXYZ THỰC TẾ – RADAR, DRONE & HÀNG KHÔNG *(Bài 61–80)* **87**

↳ Đề bài tự luyện (88) • Bóc bẫy & Giải chi tiết (95)

Chuyên đề 05: MŨ – LOGARIT, CẤP SỐ & THỐNG KÊ GHÉP NHÓM DỮ LIỆU THỰC TIỄN *(Bài 81–100)* **115**

↳ Đề bài tự luyện (116) • Bóc bẫy & Giải chi tiết (124)

PHẦN II. 100 BÀI TOÁN TRẢ LỜI NGẮN THỰC TẾ 7–10Đ (Bài 101 – 200)

Chuyên đề 06: TỐI ƯU HÓA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN, BỂ CHỨA & CHI PHÍ VẬT LIỆU *(Bài 101–120)* **139**

↳ Đề bài tự luyện (139) • Bóc bẫy & Giải chi tiết (144)

Chuyên đề 07: TÍCH PHÂN THỰC TẾ: VÒM CỔNG PARABOL, KIẾN TRÚC & THỂ TÍCH TRÒN XOAY *(Bài 121–140)* **164**

↳ Đề bài tự luyện (165) • Bóc bẫy & Giải chi tiết (170)

Chuyên đề 08: TỔ HỢP – XÁC SUẤT THỰC TIỄN, PHÒNG THI CBT & BIẾN CỐ ĐỐI *(Bài 141–160)* **189**

↳ Đề bài tự luyện (189) • Bóc bẫy & Giải chi tiết (195)

Chuyên đề 09: KHOẢNG CÁCH, GÓC & CỰC TRỊ HÌNH HỌC OXYZ THỰC TIỄN *(Bài 161–180)* **210**

↳ Đề bài tự luyện (211) • Bóc bẫy & Giải chi tiết (216)

Chuyên đề 10: TĂNG TRƯỞNG KÉP, TÀI CHÍNH, ĐỊNH NGHĨA MỚI & TƯ DUY THUẬT TOÁN (ĐÓN ĐẦU TSA/GAOKAO 2027) *(Bài 181–200)* **235**

↳ Đề bài tự luyện (235) • Bóc bẫy & Giải chi tiết (241)

PHẦN I • CẤU TRÚC LŨY TIẾN (0,1 – 0,25 – 0,5 – 1,0 ĐIỂM)

100 BẪY ĐÚNG / SAI THỰC TẾ 2027

Chuyên đề 01 → Chuyên đề 05 • 400 lệnh hỏi Đúng/Sai chuẩn định dạng thi máy tính Bộ GD

CHUYÊN ĐỀ 01 • BÀI 1 – BÀI 20

HÀM SỐ, ĐẠO HÀM & TỐI ƯU HÓA KINH TẾ – SẢN XUẤT

20 bài toán Đúng/Sai (80 lệnh hỏi) bóc sạch bẫy chi phí cố định, miền xác định thực tế, điểm cực trị trên đoạn và tốc độ biến thiên tức thời.

Quét luyện CBT Chuyên đề 01

A. TÓM TẮT CÔNG THỨC & BẢN ĐỒ BẪY

1. Các mô hình hàm Doanh thu – Chi phí – Lợi nhuận – Năng suất chuẩn 2027

- Mô hình kinh tế cốt lõi: Với sản lượng x thuộc miền thực tế D, ta có hàm doanh thu $R(x) = x \cdot p(x)$ (trong đó $p(x)$ là hàm cầu giá bán), hàm tổng chi phí $C(x) = C_0 + C_{\text{biến}}(x)$ với $C_0 = C(0)$ là chi phí cố định, và hàm lợi nhuận $P(x) = R(x) - C(x)$.
- Chi phí biên và doanh thu biên: $C'(x)$ là chi phí biên (chi phí tăng thêm khi sản xuất thêm 1 đơn vị sản phẩm quanh mức x), $R'(x)$ là doanh thu biên. Điểm cực trị lợi nhuận thỏa mãn $P'(x) = 0 \iff R'(x) = C'(x)$ và phải kiểm tra dấu đổi từ $+$ sang $-$ để khẳng định là cực đại.
- Chi phí trung bình (bình quân): $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ $(x > 0)$. Nếu điểm cực tiểu nằm trong miền xác định thì tại đó $\overline{C}'(x) = 0 \iff C'(x) = \overline{C}(x)$ (chi phí biên bằng chi phí bình quân).
- Mô hình biến thiên vật lý – sinh học: Đạo hàm bậc nhất $f'(t)$ biểu diễn tốc độ biến thiên tức thời ($f'(t) > 0$: đang tăng; $f'(t) < 0$: đang giảm). Tốc độ tăng/giảm nhanh nhất đạt tại điểm cực trị của $f'(t)$, tức là nghiệm của $f''(t) = 0$ (điểm uốn), hoặc tại hai đầu mút của đoạn thời gian xét.

2. 5 Bẫy chết người ở câu Đúng/Sai Đạo hàm & Tối ưu

- Bẫy 1 – Quên chi phí cố định $C(0)$ hoặc đánh tráo Doanh thu $R(x)$ với Lợi nhuận $P(x)$: Điểm làm $R(x)$ cực đại thường KHÁC hoàn toàn điểm làm $P(x)$ cực đại; đồng thời tại $P'(x_0) = 0$ vẫn có thể là cực tiểu (lỗ nặng nhất) chứ không phải bắt đầu có lãi.
- Bẫy 2 – Vi phạm miền xác định thực tế và bỏ quên điểm biên: Giải $f'(x) = 0$ ra nghiệm x_0 nhưng x_0 nằm ngoài đoạn công suất $[a; b]$ hoặc ngoài điều kiện hình học (ví dụ $0 < x < \dfrac{b}{2}$). Khi đó GTLN/GTNN rơi vào đầu mút biên chứ không phải nghiệm đạo hàm.
- Bẫy 3 – Nhầm cực trị của hàm gốc $f(x)$ với cực trị của đạo hàm $f'(x)$: Khi đề cho đồ thị $f'(x)$ (hoặc $v(t)$, $R'(x)$, $C'(x)$), điểm cực trị của hàm gốc là nơi $f'(x)$ ĐỔI DẤU (giao trục hoành), KHÔNG phải đỉnh/đáy của đồ thị $f'(x)$.
- Bẫy 4 – Nhầm quãng đường với độ dịch chuyển & nhầm dấu tốc độ giảm: Nếu vận tốc $v(t)$ đổi dấu trên $[a; b]$, tổng quãng đường phải cộng giá trị tuyệt đối từng chặng thay vì lấy $s(b) - s(a)$. Khi hàm giảm ($f'(t) < 0$), tốc độ giảm là $|f'(t)| = -f'(t)$.
- Bẫy 5 – Ngộ nhận đồng nhất đơn vị và công thức nhớ vẹt: Cần kiểm tra đơn vị (nghìn sản phẩm $\times$ nghìn đồng = triệu đồng), và không áp dụng máy móc công thức đặc biệt (như $h = 2r$ ở hình trụ) khi đơn giá các mặt khác nhau.

B. HỆ THỐNG 20 BÀI TẬP THỰC CHIẾN (BÀI 1 – BÀI 20)

❖ Dạng 1: Doanh thu – Chi phí – Lợi nhuận

Bài 1 Vận dụng

Một xưởng sản xuất linh kiện điện tử có công suất tối đa 1 200 sản phẩm mỗi ngày. Giả sử trong một ngày xưởng sản xuất và bán hết x trăm sản phẩm (với $0 \le x \le 12$). Tổng chi phí sản xuất (tính bằng triệu đồng) được mô hình hóa bởi hàm số $C(x) = x^3 - 15x^2 + 88x + 40$. Biết giá bán mỗi sản phẩm là 400 000 đồng (tức 40 triệu đồng cho mỗi trăm sản phẩm).

a)	Chi phí cố định mỗi ngày của xưởng (khi chưa sản xuất sản phẩm nào) là 40 triệu đồng.	☐ Đ ☐ S
b)	Chi phí biên $C'(x)$ tại mức sản lượng 500 sản phẩm mỗi ngày bằng 13 triệu đồng trên mỗi trăm sản phẩm.	☐ Đ ☐ S
c)	Để lợi nhuận mỗi ngày đạt lớn nhất, xưởng cần sản xuất 800 sản phẩm mỗi ngày và khi đó lợi nhuận đạt 24 triệu đồng.	☐ Đ ☐ S
d)	Tại mức sản lượng 200 sản phẩm mỗi ngày, xưởng bắt đầu hòa vốn và chuyển sang có lãi vì đạo hàm lợi nhuận bằng 0.	☐ Đ ☐ S

Bài 2 Vận dụng

Một khu nghỉ dưỡng sinh thái có 60 căn bungalow cho thuê theo đêm. Nếu đặt giá thuê là 2 triệu đồng/đêm thì toàn bộ 60 căn đều có khách thuê. Theo thống kê kinh doanh, cứ mỗi lần tăng giá thuê thêm 0,1 triệu đồng/đêm (100 000 đồng) thì sẽ có thêm 2 căn bị bỏ trống. Biết chi phí dọn dẹp, điện nước cho mỗi căn **có khách thuê** là 0,4 triệu đồng/đêm và chi phí bảo trì cố định toàn khu là 15 triệu đồng/đêm.

a) Nếu khu nghỉ dưỡng tăng giá thuê k lần (mỗi lần 0,1 triệu đồng, với $0 \le k \le 30$) thì doanh thu mỗi đêm là $R(k) = -0{,}2k^2 + 2k + 120$ (triệu đồng). ☐ Đ ☐ S

b) Để lợi nhuận mỗi đêm đạt lớn nhất, khu nghỉ dưỡng nên đặt giá thuê là 2,5 triệu đồng/đêm. ☐ Đ ☐ S

c) Lợi nhuận lớn nhất mỗi đêm khu nghỉ dưỡng có thể đạt được là 90,8 triệu đồng, khi có 46 căn được thuê. ☐ Đ ☐ S

d) Nếu cho thuê kín cả 60 căn với giá 2 triệu đồng/đêm thì lợi nhuận mỗi đêm đạt 96 triệu đồng. ☐ Đ ☐ S

Bài 3 Vận dụng cao

Một nhà máy chế tạo thiết bị lọc không khí có kế hoạch sản xuất từ 50 đến 300 bộ mỗi tháng (tức sản lượng $x \in [50; 300]$, đơn vị: bộ). Tổng chi phí sản xuất x bộ mỗi tháng được tính theo công thức $C(x) = 0{,}02x^2 + 12x + 3\,600$ (triệu đồng). Gọi $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất bình quân trên mỗi bộ thiết bị.

a) Hàm chi phí sản xuất bình quân là $\overline{C}(x) = 0{,}02x + 12 + \dfrac{3\,600}{x}$ (triệu đồng/bộ). ☐ Đ ☐ S

b) Phương trình $\overline{C}'(x) = 0$ có nghiệm dương thuộc đoạn $[50; 300]$ nên chi phí bình quân đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm nằm trong khoảng $(50; 300)$. ☐ Đ ☐ S

c) Trong phạm vi công suất kế hoạch $[50; 300]$, chi phí sản xuất bình quân nhỏ nhất bằng 30 triệu đồng/bộ. ☐ Đ ☐ S

d) Với mọi mức sản lượng $x \in [50; 300]$, chi phí biên $C'(x)$ luôn nhỏ hơn chi phí bình quân $\overline{C}(x)$. ☐ Đ ☐ S

Bài 4 Vận dụng cao

Một doanh nghiệp độc quyền sản xuất và bán x nghìn sản phẩm mỗi tháng ($0 < x \le 12$) với giá bán phụ thuộc vào sản lượng theo hàm cầu $p(x) = 120 - 6x$ (nghìn đồng/sản phẩm). Tổng chi phí sản xuất là $C(x) = 2x^2 + 24x + 40$ (triệu đồng). Lưu ý rằng doanh thu khi bán x nghìn sản phẩm với giá $p(x)$ nghìn đồng/sản phẩm chính bằng $R(x) = x \cdot p(x)$ (triệu đồng).

a) Trước khi đánh thuế, doanh thu của doanh nghiệp đạt lớn nhất khi bán 10 nghìn sản phẩm mỗi tháng. ☐ Đ ☐ S

b) Trước khi đánh thuế, lợi nhuận tối đa mỗi tháng của doanh nghiệp đạt 248 triệu đồng tại mức sản lượng 6 nghìn sản phẩm. ☐ Đ ☐ S

c) Nếu Nhà nước đánh thuế tiêu thụ $t = 16$ nghìn đồng trên mỗi sản phẩm bán ra thì giá bán tối ưu lợi nhuận của doanh nghiệp tăng thêm đúng 16 nghìn đồng/sản phẩm so với trước khi đánh thuế. ☐ Đ ☐ S

d) Nếu Nhà nước đánh thuế t (nghìn đồng/sản phẩm, $0 < t < 96$) và doanh nghiệp luôn chọn sản lượng tối ưu lợi nhuận sau thuế, thì để tổng tiền thuế thu được lớn nhất, Nhà nước cần ấn định $t = 48$ nghìn đồng/sản phẩm; khi đó doanh nghiệp vẫn có lãi 32 triệu đồng. ☐ Đ ☐ S

Bài 5 Thử thách 9+

Tại một nông trại trồng dưa lưới công nghệ cao, nếu bón x kg phân hữu cơ sinh học trên mỗi sào ($x \geq 0$) thì năng suất thu hoạch được mô hình hóa bởi hàm số $N(x) = 800 + \dfrac{1\,200x}{x + 15}$ (kg/sào). Biết giá bán dưa lưới tại vườn là 40 nghìn đồng/kg, giá phân hữu cơ sinh học là 200 nghìn đồng/kg, và các chi phí cố định khác (giống, nhà màng, công chăm sóc) là 20 triệu đồng/sào.

a) Dù bón lượng phân hữu cơ nhiều đến đâu thì năng suất dưa lưới trên mỗi sào cũng không thể vượt quá 2 000 kg. ☐ Đ ☐ S

b) Vì hàm năng suất $N(x)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$ nên lượng phân bón càng lớn thì lợi nhuận trên mỗi sào càng tăng. ☐ Đ ☐ S

c) Để lợi nhuận thu được trên mỗi sào đạt lớn nhất, nông trại nên bón đúng 45 kg phân hữu cơ mỗi sào, khi đó lợi nhuận đạt 39 triệu đồng/sào. ☐ Đ ☐ S

d) Nếu nông trại không bón phân hữu cơ ($x = 0$) thì bị lỗ 8 triệu đồng trên mỗi sào. ☐ Đ ☐ S

❖ Dạng 2: Vận tốc biến thiên – Nồng độ thuốc – Dân số

Bài 6 Vận dụng

Sau khi tiêm một liều kháng sinh cho bệnh nhân, nồng độ thuốc trong máu sau t giờ ($t \geq 0$) được mô hình hóa bởi hàm số $C(t) = \dfrac{16t}{t^2 + 4}$ (mg/lít). Biết rằng thuốc chỉ phát huy hiệu quả điều trị tốt khi nồng độ trong máu đạt tối thiểu 3,2 mg/lít.

a) Nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị lớn nhất bằng 4 mg/lít tại thời điểm $t = 2$ giờ sau khi tiêm. ☐ Đ ☐ S

b) Tại thời điểm $t = 1$ giờ sau khi tiêm, nồng độ thuốc đang tăng với tốc độ 1,92 mg/(lít·giờ). ☐ Đ ☐ S

c) Khoảng thời gian thuốc duy trì hiệu quả điều trị ($C(t) \geq 3{,}2$ mg/lít) kéo dài 4 giờ. ☐ Đ ☐ S

d) Kể từ sau thời điểm đạt cực đại ($t > 2$), tốc độ giảm nồng độ thuốc đạt lớn nhất tại thời điểm $t = 2\sqrt{3}$ giờ. ☐ Đ ☐ S

Bài 7 Vận dụng

Trong phòng thí nghiệm sinh học, số lượng cá thể của một quần thể vi khuẩn (tính bằng nghìn cá thể) sau t giờ nuôi cấy ($t \geq 0$) tuân theo mô hình tăng trưởng Logistic:

$$P(t) = \frac{200}{1 + 9e^{-0{,}5t}}.$$

a) Ban đầu ($t = 0$) trong môi trường nuôi cấy có 20 nghìn cá thể vi khuẩn và sức chứa tối đa của môi trường là 200 nghìn cá thể. ☐ Đ ☐ S

b) Vì $P'(t) > 0$ với mọi $t \geq 0$ nên tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn luôn tăng theo thời gian. ☐ Đ ☐ S

c) Tốc độ tăng trưởng của quần thể đạt lớn nhất bằng 25 nghìn cá thể/giờ tại thời điểm số lượng cá thể đạt đúng một nửa sức chứa của môi trường. ☐ Đ ☐ S

d) Thời điểm tốc độ tăng trưởng đạt lớn nhất là $t = 2\ln 3$ giờ. ☐ Đ ☐ S

Bài 8 Vận dụng

Một xe tự hành thử nghiệm chuyển động trên một đường thẳng, tọa độ (vị trí) của xe so với vạch xuất phát tại thời điểm t giây ($0 \le t \le 12$) được cho bởi phương trình:

$$s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t \text{ (mét)}.$$

a) Vận tốc lớn nhất của xe trên đoạn thời gian $[0;12]$ đạt 25 m/s tại thời điểm $t = 4$ giây. ☐ Đ ☐ S

b) Tại thời điểm $t = 9$ giây, xe dừng lại tức thời rồi đổi chiều chuyển động. ☐ Đ ☐ S

c) Trong 12 giây đầu tiên, tổng quãng đường xe đã đi được bằng 108 mét. ☐ Đ ☐ S

d) Tốc độ (độ lớn vận tốc) lớn nhất của xe trong suốt 12 giây đầu là 25 m/s. ☐ Đ ☐ S

Bài 9 Vận dụng cao

Một khối kim loại sau khi nung nóng đến 200°C được đặt trong phòng thí nghiệm có nhiệt độ không đổi là 25°C. Theo định luật làm nguội Newton, nhiệt độ của khối kim loại sau t phút ($t \ge 0$) được cho bởi $T(t) = 25 + 175e^{-kt}$ ($^\circ$C), với $k > 0$ là hằng số. Biết sau đúng 10 phút, nhiệt độ khối kim loại giảm xuống còn $112{,}5^\circ$C.

a) Hằng số làm nguội là $k = \dfrac{\ln 2}{10}$ và nhiệt độ của khối kim loại sau 20 phút là $68{,}75^\circ$C. ☐ Đ ☐ S

b) Tại mọi thời điểm $t \ge 0$, tốc độ giảm nhiệt độ $-T'(t)$ luôn tỉ lệ thuận với nhiệt độ $T(t)$ của khối kim loại. ☐ Đ ☐ S

c) Tốc độ giảm nhiệt độ tại thời điểm ban đầu $t = 0$ bằng $17{,}5\ln 2$ ($^\circ$C/phút) và gấp đôi tốc độ giảm nhiệt độ tại thời điểm $t = 10$ phút. ☐ Đ ☐ S

d) Thời gian để khối kim loại nguội từ 200°C xuống còn 50°C là $10\log_2 7$ phút (xấp xỉ 28,07 phút). ☐ Đ ☐ S

Bài 10 Thử thách 9+

Trong dược động học, nồng độ một loại thuốc giảm đau trong huyết tương sau khi uống t giờ ($t \ge 0$) được mô hình hóa bởi hàm hiệu hai hàm mũ (hấp thu và thải trừ):

$$C(t) = 20\left(e^{-0{,}2t} - e^{-0{,}8t}\right) \text{ (mg/lít)}.$$

a) Tại thời điểm ngay khi bắt đầu uống thuốc ($t = 0$), nồng độ thuốc đang tăng với tốc độ ban đầu là 12 mg/(lít·giờ). ☐ Đ ☐ S

b) Nồng độ thuốc trong huyết tương đạt cực đại tại thời điểm $t = \dfrac{5\ln 2}{3}$ giờ. ☐ Đ ☐ S

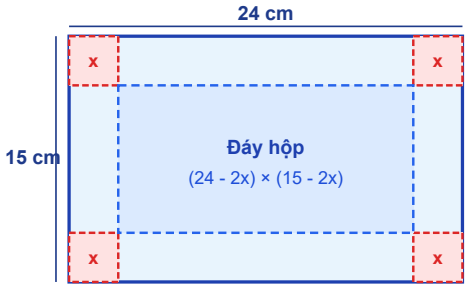
c) Nồng độ cực đại của thuốc trong huyết tương bằng $\dfrac{15}{\sqrt[3]{4}}$ mg/lít (xấp xỉ 9,45 mg/lít). ☐ Đ ☐ S

d) Thời điểm nồng độ thuốc trong huyết tương giảm nhanh nhất đúng bằng gấp đôi thời điểm nồng độ thuốc đạt cực đại. ☐ Đ ☐ S

❖ Dạng 3: Tối ưu hóa thiết kế kỹ thuật – Vận tải

Bài 11 Vận dụng

Từ một tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước 24 cm × 15 cm, người thợ cắt bỏ bốn hình vuông bằng nhau có cạnh x (cm) ở bốn góc rồi gấp phần còn lại lên để tạo thành một chiếc hộp hình hộp chữ nhật **không có nắp** (như hình vẽ minh họa).



Cắt 4 hình vuông cạnh x ở 4 góc rồi gấp thành hộp không nắp

a) Điều kiện xác định của cạnh hình vuông cắt bỏ là $0 < x < 12$. ☐ Đ ☐ S

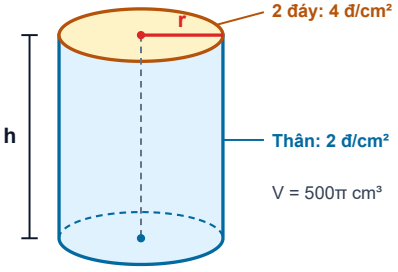
b) Thể tích của chiếc hộp theo x là $V(x) = 4x^3 - 78x^2 + 360x$ (cm^3). ☐ Đ ☐ S

c) Thể tích lớn nhất của chiếc hộp đạt 486 cm^3 khi cắt bốn hình vuông có cạnh $x = 3$ cm. ☐ Đ ☐ S

d) Khi chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất thì diện tích tấm nhôm dùng làm mặt ngoài chiếc hộp (gồm đáy và bốn mặt bên) bằng 342 cm^2. ☐ Đ ☐ S

Bài 12 Vận dụng

Một nhà máy thiết kế loại lon sữa đặc hình trụ **kín** (có đủ nắp trên và đáy dưới) với thể tích cố định $V = 500\pi$ cm^3. Do yêu cầu chịu lực, vật liệu làm nắp trên và đáy dưới có đơn giá 4 đồng/cm^2, còn vật liệu làm mặt xung quanh có đơn giá 2 đồng/cm^2. Gọi r (cm) là bán kính đáy và h (cm) là chiều cao của lon sữa ($r > 0, h > 0$).



Lon sữa hình trụ kín (có cả nắp và đáy)

a) Chi phí vật liệu để sản xuất một lon sữa biểu diễn theo bán kính đáy r là $T(r) = \pi\left(8r^2 + \dfrac{2\,000}{r}\right)$ (đồng). ☐ Đ ☐ S

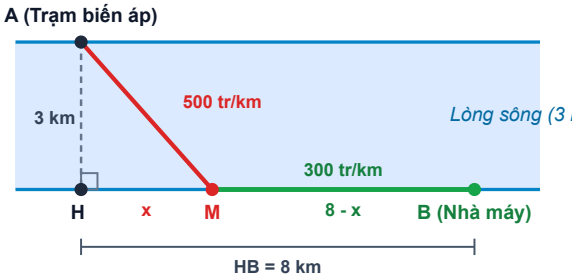
b) Để chi phí vật liệu là nhỏ nhất thì chiều cao lon sữa phải bằng đường kính đáy ($h = 2r$). ☐ Đ ☐ S

c) Chi phí vật liệu nhỏ nhất đạt được khi bán kính đáy $r = 5$ cm và chiều cao $h = 20$ cm. ☐ Đ ☐ S

d) Chi phí vật liệu nhỏ nhất cho mỗi lon sữa bằng 600π đồng (xấp xỉ 1 885 đồng). ☐ Đ ☐ S

Bài 13 Vận dụng cao

Một trạm biến áp A nằm trên một bờ sông thẳng rộng 3 km, đối diện vuông góc qua sông là điểm H trên bờ bên kia ($AH = 3$ km). Một nhà máy B nằm trên bờ bên kia cách H một đoạn $HB = 8$ km. Đơn vị thi công dự định kéo dây cáp ngầm dưới lòng sông từ A đến điểm M thuộc đoạn HB, rồi kéo tiếp trên bờ từ M đến B (xem hình vẽ). Biết chi phí kéo cáp dưới lòng sông là 500 triệu đồng/km và kéo trên bờ là 300 triệu đồng/km. Đặt $HM = x$ (km), với $0 \le x \le 8$.



a) Hàm tổng chi phí kéo dây cáp theo x là $C(x) = 500\sqrt{x^2+9} + 300(8-x)$ (triệu đồng). ☐ Đ ☐ S

b) Để tổng chi phí kéo cáp nhỏ nhất, cần chọn vị trí M cách H một đoạn 2,25 km và khi đó tổng chi phí bằng 3,6 tỷ đồng. ☐ Đ ☐ S

c) So với phương án kéo vuông góc qua sông ($A \to H \to B$), phương án tối ưu tiết kiệm được 672 triệu đồng. ☐ Đ ☐ S

d) Nếu vị trí nhà máy B nằm gần hơn sao cho $HB = 2$ km (các thông số khác không đổi), thì phương án tiết kiệm chi phí nhất là kéo thẳng trực tiếp từ A đến B dưới lòng sông. ☐ Đ ☐ S

Bài 14 Vận dụng cao

Một tàu chở hàng chạy ngược dòng sông trên quãng đường dài 120 km. Biết vận tốc dòng nước chảy là 4 km/h và gọi v (km/h, với $v > 4$) là vận tốc riêng của tàu trong nước yên lặng. Chi phí nhiên liệu tiêu thụ mỗi giờ là $2v^3$ (nghìn đồng/giờ) và các chi phí vận hành cố định khác (nhân công, khấu hao) là 1 600 nghìn đồng/giờ.

a) Tổng chi phí cho cả chuyến đi ngược dòng là $C(v) = \dfrac{240(v^3+800)}{v-4}$ (nghìn đồng). ☐ Đ ☐ S

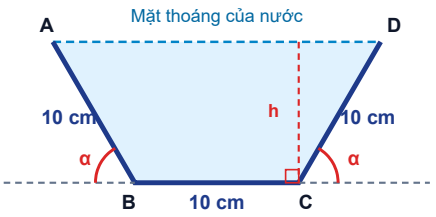
b) Để tổng chi phí cả chuyến đi đạt nhỏ nhất, tàu cần duy trì vận tốc thực so với bờ là 10 km/h. ☐ Đ ☐ S

c) Tổng chi phí nhỏ nhất cho cả chuyến đi ngược dòng là 72 triệu đồng, với thời gian hành trình kéo dài 20 giờ. ☐ Đ ☐ S

d) Nếu chỉ xét riêng tổng chi phí nhiên liệu (bỏ qua chi phí cố định 1 600 nghìn đồng/giờ) thì tàu vẫn nên giữ vận tốc riêng $v = 10$ km/h để tiết kiệm nhiên liệu nhất. ☐ Đ ☐ S

Bài 15 Thử thách 9+

Một tấm tôn phẳng hình chữ nhật có bề rộng 30 cm được chia làm ba phần bằng nhau theo chiều rộng (mỗi phần rộng 10 cm), sau đó bẻ gập đối xứng hai bên lên tạo thành một máng dẫn nước có mặt cắt ngang là hình thang cân $ABCD$ với đáy nhỏ $BC = 10$ cm và hai cạnh bên $AB = CD = 10$ cm (xem hình vẽ). Gọi $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ là góc tạo bởi mỗi thành máng bên với phương ngang.



Tiết diện máng dẫn nước hình thang cân ABCD

a) Diện tích mặt cắt ngang của máng dẫn nước theo góc α là $S(\alpha) = 100\sin\alpha(1 + \cos\alpha)$ (cm^2). ☐ Đ ☐ S

b) Khi bẻ gập vuông góc hai thành máng ($\alpha = 90°$) để tạo máng hình chữ nhật thì diện tích mặt cắt ngang đạt lớn nhất. ☐ Đ ☐ S

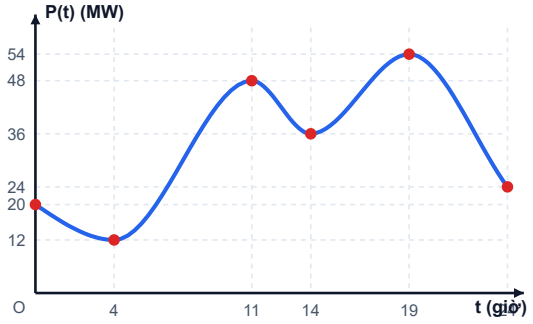
c) Máng dẫn được nhiều nước nhất (diện tích mặt cắt lớn nhất) khi góc giữa đáy máng và thành máng là $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 120°$. ☐ Đ ☐ S

d) Diện tích mặt cắt ngang lớn nhất của máng dẫn nước bằng $75\sqrt{3}$ cm^2 (xấp xỉ 129,9 cm^2). ☐ Đ ☐ S

❖ Dạng 4: Đọc bảng biến thiên / Đồ thị thực tế

Bài 16 Vận dụng

Đồ thị bên dưới biểu diễn hàm số $P(t)$ (tính bằng MW) là công suất tiêu thụ điện của một khu công nghiệp trong một ngày 24 giờ ($0 \le t \le 24$, đơn vị giờ). Biết đồ thị là một đường cong trơn có các điểm cực trị tại $(4; 12)$, $(11; 48)$, $(14; 36)$, $(19; 54)$ và hai đầu mút tại $(0; 20)$, $(24; 24)$.



a) Trong ngày, công suất tiêu thụ điện đạt mức thấp nhất là 12 MW lúc 4 giờ sáng và cao nhất là 54 MW lúc 19 giờ tối. ☐ Đ ☐ S

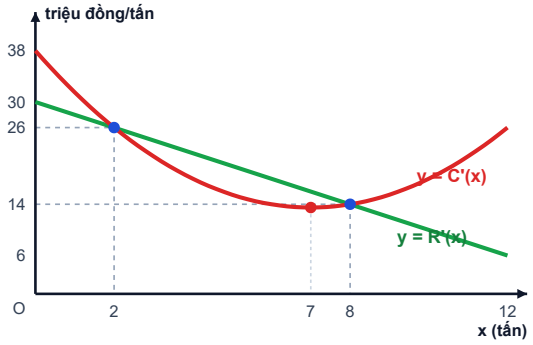
b) Trong khoảng thời gian từ 11 giờ đến 14 giờ, đạo hàm $P'(t)$ luôn nhận giá trị dương. ☐ Đ ☐ S

c) Trong một ngày, có đúng 2 thời điểm mà công suất tiêu thụ điện của khu công nghiệp đạt đúng 36 MW. ☐ Đ ☐ S

d) Trong một ngày, có đúng 4 thời điểm mà công suất tiêu thụ điện đạt mức 40 MW. ☐ Đ ☐ S

Bài 17 Vận dụng

Một nhà máy hóa chất sản xuất tối đa 12 tấn sản phẩm mỗi ngày ($x \in [0;12]$). Hình vẽ bên dưới biểu diễn đồ thị hàm **doanh thu biên** $R'(x) = 30 - 2x$ (đường thẳng màu xanh) và hàm **chi phí biên** $C'(x) = 0{,}5x^2 - 7x + 38$ (đường parabol màu đỏ, có đỉnh tại $x = 7$), đơn vị đều là triệu đồng/tấn. Biết hai đồ thị cắt nhau tại đúng hai điểm có hoành độ $x = 2$ và $x = 8$. Gọi $P(x) = R(x) - C(x)$ là hàm lợi nhuận của nhà máy.



a) Hàm lợi nhuận $P(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;8)$. ☐ Đ ☐ S

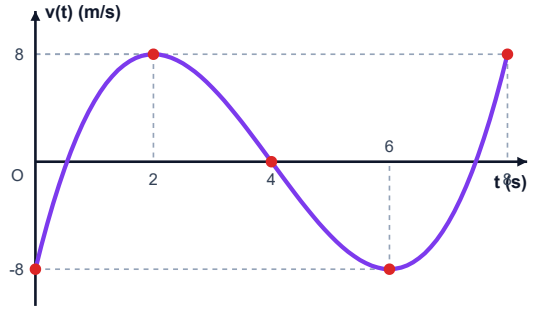
b) Hàm lợi nhuận $P(x)$ đạt cực tiểu địa phương tại $x = 2$ tấn và đạt cực đại địa phương tại $x = 8$ tấn. ☐ Đ ☐ S

c) Lợi nhuận của nhà máy đạt cực đại tại $x = 7$ tấn vì tại đó chi phí biên $C'(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất. ☐ Đ ☐ S

d) Khi tăng sản lượng từ 2 tấn lên 8 tấn, lợi nhuận của nhà máy tăng thêm đúng 18 triệu đồng. ☐ Đ ☐ S

Bài 18 Vận dụng cao

Một chất điểm chuyển động thẳng trong 8 giây đầu tiên ($0 \le t \le 8$) có đồ thị vận tốc $v(t) = \dfrac{1}{2}(t-4)^3 - 6(t-4)$ (m/s) như hình vẽ bên dưới. Đồ thị đạt cực đại địa phương tại $(2;8)$, cực tiểu địa phương tại $(6;-8)$, cắt trục hoành tại $t = 4$ và hai điểm khác thuộc $(0;2)$ và $(6;8)$.



Đồ thị vận tốc v(t) trên đoạn [0; 8]

a) Trên khoảng thời gian $(0;2)$, vì đồ thị $v(t)$ luôn đi lên nên chất điểm luôn chuyển động theo chiều dương. ☐ Đ ☐ S

b) Trong khoảng thời gian $(0;8)$, chất điểm đổi chiều chuyển động đúng 3 lần. ☐ Đ ☐ S

c) Gia tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;8]$ tại thời điểm $t = 2$ giây. ☐ Đ ☐ S

d) Trên khoảng thời gian $(2;4)$, chất điểm chuyển động chậm dần theo chiều dương và gia tốc đạt giá trị nhỏ nhất bằng -6 m/s^2 tại $t = 4$ giây. ☐ Đ ☐ S

Bài 19 Vận dụng cao

Dung tích nước $V(t)$ (tính bằng triệu m^3) tích trữ trong một hồ chứa thủy điện trong 12 tháng của năm ($0 \le t \le 12$, đơn vị tháng) được cho bởi bảng biến thiên liên tục bên dưới, trong đó $V'(t)$ (triệu m^3/tháng) là lưu lượng nước ròng chảy vào hồ (bằng lưu lượng nước chảy vào trừ lưu lượng nước xả ra).

t	0		3		7		10		12
V'(t)		−	0	+	0	−	0	+	
V(t)	120	↘	75	↗	180	↘	110	↗	150

a) Dung tích nước trong hồ đạt mức thấp nhất trong năm tại thời điểm $t = 3$ tháng, với 75 triệu m^3. ☐ Đ ☐ S

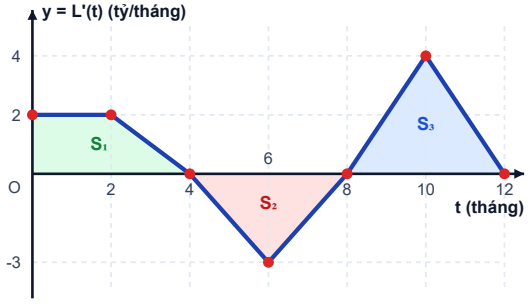
b) Trong khoảng thời gian từ tháng thứ 3 đến tháng thứ 7, lưu lượng nước xả ra luôn lớn hơn lưu lượng nước chảy vào hồ. ☐ Đ ☐ S

c) Trong cả năm ($t \in [0; 12]$), có đúng 3 thời điểm mà dung tích nước trong hồ bằng đúng 120 triệu m^3. ☐ Đ ☐ S

d) Tốc độ tăng dung tích nước trung bình trong giai đoạn từ tháng thứ 3 đến tháng thứ 7 bằng 26,25 triệu m^3/tháng. ☐ Đ ☐ S

Bài 20 Thử thách 9+

Một doanh nghiệp theo dõi tốc độ biến thiên lợi nhuận theo tháng $L'(t)$ (tính bằng tỷ đồng/tháng) trong suốt 12 tháng của năm tài chính ($0 \le t \le 12$). Đồ thị hàm số $y = L'(t)$ là đường gấp khúc đi qua các điểm $(0; 2)$, $(2; 2)$, $(4; 0)$, $(6; -3)$, $(8; 0)$, $(10; 4)$, $(12; 0)$ như hình vẽ (tạo với trục hoành ba miền phẳng có diện tích S_1, S_2, S_3).



a) Hàm lợi nhuận $L(t)$ đạt cực đại địa phương tại thời điểm $t = 4$ tháng. ☐ Đ ☐ S

b) Hàm lợi nhuận $L(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 12]$ tại thời điểm $t = 6$ tháng. ☐ Đ ☐ S

c) Tại thời điểm $t = 8$ tháng, lợi nhuận $L(8)$ đúng bằng lợi nhuận thời điểm đầu năm $L(0)$. ☐ Đ ☐ S

d) Giá trị lớn nhất của lợi nhuận $L(t)$ trên đoạn $[0; 12]$ đạt tại thời điểm $t = 10$ tháng. ☐ Đ ☐ S

C. BÓC BẪY & HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT CHUYÊN ĐỀ 01

Hướng dẫn giải Bài 1

Dạng 1: Doanh thu – Chi phí – Lợi nhuận

Đáp án chuẩn: a) **ĐÚNG** | b) **ĐÚNG** | c) **ĐÚNG** | d) **SAI**

⚠ **Bẫy 80% học sinh dính:** Bẫy 2 tầng: (1) Học sinh hay quên quy đổi x là số TRĂM sản phẩm nên thay $x = 500$ thay vì $x = 5$; (2) Nhầm lẫn nghiệm $P'(2) = 0$ là điểm hòa vốn hoặc bắt đầu có lãi, trong khi thực chất $x = 2$ là điểm CỰC TIỂU lợi nhuận ($P(2) = -84$ triệu đồng — lỗ nặng nhất!).

💡 **Gợi ý Socrates:** 1. Đơn vị của biến x là gì khi đề cho 500 sản phẩm hay 800 sản phẩm? 2. Khi $P'(x_0) = 0$, cần xét thêm bảng biến thiên và giá trị $P(x_0)$ hay chỉ cần $P'(x_0) = 0$ là kết luận có lãi?

Hàm doanh thu khi bán x trăm sản phẩm ($0 \le x \le 12$) là $R(x) = 40x$ (triệu đồng).

Hàm lợi nhuận là:

$$P(x) = R(x) - C(x) = 40x - (x^3 - 15x^2 + 88x + 40) = -x^3 + 15x^2 - 48x - 40$$

a) Đúng. Chi phí cố định ứng với $x = 0$: $C(0) = 40$ (triệu đồng).

b) Đúng. Ta có hàm chi phí biên $C'(x) = 3x^2 - 30x + 88$. Mức sản lượng 500 sản phẩm tương ứng với $x = 5$ (trăm sản phẩm). Khi đó:

$$C'(5) = 3 \cdot 5^2 - 30 \cdot 5 + 88 = 75 - 150 + 88 = 13 \text{ (triệu đồng/trăm sản phẩm)}.$$

c) Đúng. Xét $P'(x) = -3x^2 + 30x - 48 = -3(x-2)(x-8)$. Trên đoạn $[0;12]$, phương trình $P'(x) = 0$ có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 8$. Tính giá trị tại các điểm biên và điểm dừng:

- $P(0) = -40$;
- $P(2) = -2^3 + 15 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 - 40 = -84$;
- $P(8) = -8^3 + 15 \cdot 8^2 - 48 \cdot 8 - 40 = 24$;
- $P(12) = -12^3 + 15 \cdot 12^2 - 48 \cdot 12 - 40 = -184$.

Vậy $\max_{[0;12]} P(x) = 24$ (triệu đồng) đạt tại $x = 8$, tức 800 sản phẩm/ngày.

d) Sai. Tại mức 200 sản phẩm ($x = 2$), tuy $P'(2) = 0$ nhưng qua $x = 2$ thì $P'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x = 2$ là điểm cực tiểu lợi nhuận với $P(2) = -84 < 0$ (xưởng đang lỗ nặng nhất 84 triệu đồng, chưa hề hòa vốn).

Kết luận: a) Đúng, b) Đúng, c) Đúng, d) Sai.

Hướng dẫn giải Bài 2

Dạng 1: Doanh thu – Chi phí – Lợi nhuận

Đáp án chuẩn: a) **ĐÚNG** | b) **SAI** | c) **ĐÚNG** | d) **SAI**

⚠ **Bẫy 80% học sinh dính:** Bẫy kinh điển 3 trong 1: (1) Đánh tráo giá tối đa DOANH THU (2,5 triệu đồng/đêm) thành giá tối đa LỢI NHUẬN (2,7 triệu đồng/đêm); (2) Quên trừ chi phí bảo trì cố định 15 triệu đồng ở ý d); (3) Tính sai chi phí dọn dẹp cho cả 60 căn thay vì chỉ $(60-2k)$ căn có khách.

💡 **Gợi ý Socrates:** 1. Doanh thu tối đa và lợi nhuận tối đa có xảy ra ở cùng một mức giá khi chi phí biến đổi phụ thuộc vào số phòng cho thuê không? 2. Khi tính lợi nhuận tại $k=0$, ngoài chi phí 0,4 triệu/căn, còn khoản chi phí cố định nào phải trừ nữa?

Gọi k là số lần tăng giá thêm 0,1 triệu đồng/đêm ($0 \le k \le 30$). Khi đó giá thuê mỗi căn là $p = 2 + 0{,}1k$ (triệu đồng) và số căn có khách thuê là $n = 60 - 2k$ (căn).

a) Đúng. Doanh thu mỗi đêm là:

$$R(k) = (2+0{,}1k)(60-2k) = 120 - 4k + 6k - 0{,}2k^2 = -0{,}2k^2 + 2k + 120 \text{ (triệu đồng)}.$$

b) Sai. Chi phí biến đổi cho $(60-2k)$ căn có khách là $0{,}4(60-2k)$ (triệu đồng), chi phí cố định là 15 triệu đồng. Do đó hàm lợi nhuận là:

$$L(k) = (2+0{,}1k-0{,}4)(60-2k) - 15 = (1{,}6+0{,}1k)(60-2k) - 15 = -0{,}2k^2 + 2{,}8k + 81.$$

Ta có $L'(k) = -0{,}4k + 2{,}8 = 0 \iff k = 7$. Khi đó giá thuê tối ưu lợi nhuận là $p = 2 + 0{,}1 \cdot 7 = 2{,}7$ triệu đồng/đêm. Mức giá 2,5 triệu đồng/đêm (ứng với $k=5$) chỉ là mức tối đa hóa doanh thu ($R'(k) = -0{,}4k + 2 = 0 \iff k = 5$).

c) Đúng. Tại $k = 7$: số căn có khách là $n = 60 - 2 \cdot 7 = 46$ căn và lợi nhuận lớn nhất là:

$$L(7) = -0{,}2 \cdot 7^2 + 2{,}8 \cdot 7 + 81 = -9{,}8 + 19{,}6 + 81 = 90{,}8 \text{ (triệu đồng)}.$$

d) Sai. Khi cho thuê kín 60 căn ($k=0$), lợi nhuận mỗi đêm là:

$$L(0) = (2-0{,}4) \cdot 60 - 15 = 96 - 15 = 81 \text{ (triệu đồng)},$$

không phải 96 triệu đồng (do đã bỏ sót 15 triệu đồng chi phí cố định).

Kết luận: a) Đúng, b) Sai, c) Đúng, d) Sai.

Hướng dẫn giải Bài 3 Dạng 1: Doanh thu – Chi phí – Lợi nhuận

Đáp án chuẩn: a) **ĐÚNG** | b) **SAI** | c) **ĐÚNG** | d) **ĐÚNG**

⚠ **Bẫy 80% học sinh dính:** Bẫy miền xác định & điểm biên kinh điển: Học sinh dùng bất đẳng thức AM-GM (Cô-si) cho $0{,}02x + \frac{3\,600}{x}$ ra ngay dấu bằng tại $x = 300\sqrt{2} \approx 424{,}26$ mà QUÊN mất công suất nhà máy bị chặn trên ở 300 bộ! Do đó giá trị nhỏ nhất phải rơi vào đầu mút $x = 300$.

Gợi ý Socrates: 1. Nghiệm dương của $\overline{C}'(x) = 0$ là $x = 300\sqrt{2} \approx 424{,}26$; con số này có nằm trong đoạn $[50; 300]$ không? 2. Khi $\overline{C}'(x) < 0$ trên cả đoạn $[50; 300]$, hãy biến đổi $\overline{C}'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} < 0$ để so sánh $C'(x)$ với $\overline{C}(x)$.

a) Đúng. Theo định nghĩa, với $x \in [50; 300]$:

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0{,}02x^2 + 12x + 3\,600}{x} = 0{,}02x + 12 + \frac{3\,600}{x} \text{ (triệu đồng/bộ)}.$$

b) Sai. Ta có:

$$\overline{C}'(x) = 0{,}02 - \frac{3\,600}{x^2} = \frac{0{,}02x^2 - 3\,600}{x^2}.$$

Giải $\overline{C}'(x) = 0$ với $x > 0$ ta được $x^2 = 180\,000 \iff x = 300\sqrt{2} \approx 424{,}26 \notin [50; 300]$. Do đó phương trình $\overline{C}'(x) = 0$ vô nghiệm trên $[50; 300]$.

c) Đúng. Với mọi $x \in [50; 300]$, ta có $x^2 \le 90\,000 < 180\,000$ nên $\overline{C}'(x) < 0$. Suy ra hàm $\overline{C}(x)$ nghịch biến trên toàn đoạn $[50; 300]$. Do đó:

$$\min_{[50;300]} \overline{C}(x) = \overline{C}(300) = 0{,}02 \cdot 300 + 12 + \frac{3\,600}{300} = 6 + 12 + 12 = 30 \text{ (triệu đồng/bộ)}.$$

d) Đúng. Ta có đồng nhất thức:

$$\overline{C}'(x) = \left(\frac{C(x)}{x}\right)' = \frac{C'(x) - \overline{C}(x)}{x}.$$

Vì $\overline{C}'(x) < 0$ và $x > 0$ với mọi $x \in [50; 300]$ nên $C'(x) < \overline{C}(x)$ với mọi $x \in [50; 300]$ (kiểm chứng tại $x = 300$: $C'(300) = 0{,}04 \cdot 300 + 12 = 24 < 30 = \overline{C}(300)$).

Kết luận: a) Đúng, b) Sai, c) Đúng, d) Đúng.

Hướng dẫn giải Bài 4 Dạng 1: Doanh thu – Chi phí – Lợi nhuận

Đáp án chuẩn: a) **ĐÚNG** | b) **ĐÚNG** | c) **SAI** | d) **ĐÚNG**

⚠ **Bẫy 80% học sinh dính:** Bẫy trực giác kinh tế ở ý c): Đa số học sinh cho rằng bị đánh thuế 16 nghìn đồng/sản phẩm thì doanh nghiệp sẽ cộng nguyên 16 nghìn đồng vào giá bán. Thực tế, vì hàm cầu dốc xuống, khi giảm sản lượng từ 6 xuống 5 nghìn sản phẩm thì giá bán tối ưu chỉ tăng thêm 6 nghìn đồng/sản phẩm (từ 84 lên 90 nghìn đồng).

💡 **Gợi ý Socrates:** 1. Khi có thuế t nghìn đồng/sản phẩm, tổng tiền thuế $t \cdot x$ (triệu đồng) làm hàm lợi nhuận sau thuế thay đổi như thế nào? 2. Sau khi tìm sản lượng tối ưu $x(t)$, đừng quên thay ngược $x(t)$ vào hàm cầu $p(x)$ để so sánh giá bán trước và sau thuế!

a) Đúng. Hàm doanh thu $R(x) = x(120 - 6x) = -6x^2 + 120x$ (triệu đồng). Ta có $R'(x) = -12x + 120 = 0 \iff x = 10 \in (0; 12]$. Vì $R(x)$ là hàm bậc hai có hệ số $a = -6 < 0$ nên $R(x)$ đạt cực đại tại $x = 10$ (nghìn sản phẩm).

b) Đúng. Trước thuế, hàm lợi nhuận là:

$$P(x) = R(x) - C(x) = (-6x^2 + 120x) - (2x^2 + 24x + 40) = -8x^2 + 96x - 40.$$

Ta có $P'(x) = -16x + 96 = 0 \iff x = 6$. Khi đó $P_{\max} = P(6) = -8 \cdot 36 + 96 \cdot 6 - 40 = 248$ (triệu đồng) và giá bán là $p(6) = 120 - 6 \cdot 6 = 84$ (nghìn đồng/sản phẩm).

c) Sai. Khi đánh thuế t nghìn đồng/sản phẩm, tổng thuế phải nộp là $t \cdot x$ (triệu đồng). Lợi nhuận sau thuế là:

$$P_t(x) = -8x^2 + (96 - t)x - 40.$$

Đạt cực đại tại $x(t) = \dfrac{96 - t}{16}$. Với $t = 16$, ta có $x(16) = \dfrac{96 - 16}{16} = 5$ (nghìn sản phẩm), suy ra giá bán tối ưu là $p(5) = 120 - 6 \cdot 5 = 90$ (nghìn đồng/sản phẩm). Vậy giá bán chỉ tăng $90 - 84 = 6$ nghìn đồng/sản phẩm, không phải 16 nghìn đồng/sản phẩm.

d) Đúng. Tổng tiền thuế Nhà nước thu được là:

$$T(t) = t \cdot x(t) = \frac{t(96 - t)}{16} = \frac{-t^2 + 96t}{16} \text{ (triệu đồng).}$$

Ta có $T'(t) = \dfrac{-2t + 96}{16} = 0 \iff t = 48$ (nghìn đồng/sản phẩm). Khi $t = 48$, sản lượng của doanh nghiệp là $x(48) = \dfrac{96 - 48}{16} = 3$ (nghìn sản phẩm), tiền thuế đạt cực đại $T(48) = 144$ triệu đồng, và lợi nhuận sau thuế của doanh nghiệp là:

$$P_{48}(3) = -8 \cdot 3^2 + (96 - 48) \cdot 3 - 40 = -72 + 144 - 40 = 32 \text{ (triệu đồng).}$$

Kết luận: a) Đúng, b) Đúng, c) Sai, d) Đúng.

Hướng dẫn giải Bài 5

Dạng 1: Doanh thu – Chi phí – Lợi nhuận

Đáp án chuẩn: a) **ĐÚNG** | b) **SAI** | c) **ĐÚNG** | d) **SAI**

⚠ **Bẫy 80% học sinh dính:** Bẫy ngộ nhận đồng biến ở ý b) và đổi đơn vị ở ý d): Học sinh thấy $N'(x) > 0$ liền suy ra lợi nhuận luôn tăng mà quên quy luật lợi suất cận biên giảm dần (phần doanh thu tăng thêm sẽ nhỏ hơn 200 nghìn đồng tiền phân khi $x > 45$). Ngoài ra cần đổi đồng nhất 20 triệu đồng $= 20\,000$ nghìn đồng.

💡 **Gợi ý Socrates:** 1. Tìm tiệm cận ngang $\lim_{x\to+\infty} N(x)$ để hiểu ngưỡng trần năng suất. 2. Lập hàm lợi nhuận $L(x) = 40N(x) - 200x - 20\,000$ (nghìn đồng) rồi giải $L'(x) = 0$ xem có nghiệm $x > 0$ không?

a) Đúng. Với mọi $x \geq 0$, ta có $N'(x) = \dfrac{1\,200 \cdot 15}{(x+15)^2} = \dfrac{18\,000}{(x+15)^2} > 0$ nên $N(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$. Mặt khác:

$$\lim_{x\to+\infty} N(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(800 + \frac{1\,200}{1 + \dfrac{15}{x}} \right) = 800 + 1\,200 = 2\,000 \text{ (kg/sào)}.$$

Vì $N(x) < 2\,000$ với mọi $x \geq 0$ nên năng suất không bao giờ vượt quá 2 000 kg/sào.

b) Sai. Hàm lợi nhuận trên mỗi sào (tính theo nghìn đồng, lưu ý 20 triệu đồng $= 20\,000$ nghìn đồng) là:

$$L(x) = 40\left(800 + \frac{1\,200x}{x+15}\right) - 200x - 20\,000 = 12\,000 + \frac{48\,000x}{x+15} - 200x.$$

Đạo hàm:

$$L'(x) = \frac{48\,000 \cdot 15}{(x+15)^2} - 200 = \frac{720\,000}{(x+15)^2} - 200.$$

Khi x đủ lớn ($x > 45$), $L'(x) < 0$ nên lợi nhuận giảm dần (thậm chí tiến về $-\infty$ khi $x \to +\infty$).

c) Đúng. Giải $L'(x) = 0$ với $x \geq 0$:

$$(x+15)^2 = \frac{720\,000}{200} = 3\,600 \iff x + 15 = 60 \iff x = 45 \text{ (kg)}.$$

Lập bảng biến thiên trên $[0;+\infty)$: $L'(x) > 0$ trên $[0;45)$ và $L'(x) < 0$ trên $(45;+\infty)$. Do đó $L(x)$ đạt cực đại toàn cục tại $x = 45$:

$$L(45) = 12\,000 + \frac{48\,000 \cdot 45}{60} - 200 \cdot 45 = 12\,000 + 36\,000 - 9\,000 = 39\,000 \text{ (nghìn đồng)} = 39 \text{ triệu đồng}.$$

d) Sai. Khi $x = 0$, năng suất là $N(0) = 800$ kg, doanh thu $40 \cdot 800 = 32\,000$ nghìn đồng $= 32$ triệu đồng. Trừ chi phí cố định 20 triệu đồng, nông trại vẫn có lãi $L(0) = 12$ triệu đồng/sào.

Kết luận: a) Đúng, b) Sai, c) Đúng, d) Sai.

Hướng dẫn giải Bài 6

Dạng 2: Vận tốc biến thiên – Nồng độ thuốc – Dân số

Đáp án chuẩn: a) **ĐÚNG** | b) **ĐÚNG** | c) **SAI** | d) **ĐÚNG**

⚠ **Bẫy 80% học sinh dính:** Bẫy ở ý c) và ý d): Ở ý c), giải $C(t) \geq 3{,}2$ ra $1 \leq t \leq 4$, nhiều học sinh lấy ngay mốc cuối $t = 4$ giờ thay vì độ dài khoảng thời gian $4 - 1 = 3$ giờ! Ở ý d), nhiều bạn tưởng ngay sau $t = 2$ là thuốc giảm nhanh nhất, nhưng thực ra tốc độ giảm $|C'(t)| = -C'(t)$ đạt cực đại tại điểm uốn $C''(t) = 0 \iff t = 2\sqrt{3}$.

Gợi ý Socrates: 1. Khi thuốc bắt đầu có hiệu quả từ t_1 đến t_2, khoảng thời gian duy trì hiệu quả bằng t_2 hay $t_2 - t_1$? 2. Tốc độ biến thiên nồng độ là $C'(t)$, vậy muốn tìm cực trị của tốc độ giảm trên $(2; +\infty)$ ta phải đạo hàm hàm nào?

Xét hàm số $C(t) = \dfrac{16t}{t^2 + 4}$ trên $[0; +\infty)$.

a) Đúng. Ta có:

$$C'(t) = \frac{16(t^2 + 4) - 16t \cdot 2t}{(t^2 + 4)^2} = \frac{16(4 - t^2)}{(t^2 + 4)^2}.$$

Với $t \geq 0$, $C'(t) = 0 \iff t = 2$. Do $C'(t) > 0$ trên $(0; 2)$ và $C'(t) < 0$ trên $(2; +\infty)$, hàm $C(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = 2$ giờ với $C_{\max} = C(2) = \dfrac{16 \cdot 2}{2^2 + 4} = 4$ (mg/lít).

b) Đúng. Tại $t = 1$, tốc độ biến thiên của nồng độ thuốc là:

$$C'(1) = \frac{16(4 - 1^2)}{(1^2 + 4)^2} = \frac{48}{25} = 1{,}92 \text{ mg/(lít} \cdot \text{giờ)}.$$

Vì $C'(1) > 0$ nên nồng độ đang tăng với tốc độ 1,92 mg/(lít·giờ).

c) Sai. Giải bất phương trình điều trị:

$$\frac{16t}{t^2 + 4} \geq 3{,}2 = \frac{16}{5} \iff 5t \geq t^2 + 4 \iff t^2 - 5t + 4 \leq 0 \iff 1 \leq t \leq 4.$$

Vậy khoảng thời gian duy trì hiệu quả điều trị kéo dài $4 - 1 = 3$ giờ (không phải 4 giờ).

d) Đúng. Trên khoảng $(2; +\infty)$, $C'(t) < 0$ nên tốc độ giảm nồng độ là $g(t) = -C'(t) = \dfrac{16(t^2 - 4)}{(t^2 + 4)^2}$. Tính đạo hàm:

$$g'(t) = -C''(t) = 16 \cdot \frac{2t(t^2 + 4)^2 - (t^2 - 4) \cdot 2(t^2 + 4) \cdot 2t}{(t^2 + 4)^4} = \frac{32t(12 - t^2)}{(t^2 + 4)^3}.$$

Trên $(2; +\infty)$, $g'(t) = 0 \iff t = 2\sqrt{3}$. Do $g'(t) > 0$ trên $(2; 2\sqrt{3})$ và $g'(t) < 0$ trên $(2\sqrt{3}; +\infty)$ nên tốc độ giảm nồng độ đạt lớn nhất tại $t = 2\sqrt{3}$ giờ.

Kết luận: a) Đúng, b) Đúng, c) Sai, d) Đúng.