TỦ SÁCH CHINH PHỤC ĐIỂM 9–10 & HỌC SINH GIỎI TOÁN 6

QUYỂN 1 / 5 • TRỌNG TÂM HỌC KÌ 1 & NỀN TẢNG HSG

SỐ HỌC NÂNG CAO, LŨY THỪA & CHIA HẾT

180 Bài Toán Tinh Tuyển (2 Tầng: 9–10 & HSG) + 180 Bài Tự Luyện Đổi Số

Tuyển chọn từ 168 đề thi HSG Quận/Huyện & đề kiểm tra học kì 2021 – 2027 • Kiểm định toán học 100%

BẢN ĐỌC THỬ MIỄN PHÍ • ĐỦ 6 CHUYÊN ĐỀ (18 BÀI MẪU + 18 BÀI TỰ LUYỆN)

CẤU TRÚC ƯU VIỆT CHUẨN SÁCH CHUYÊN KHẢO

- ✓ **Tổng cộng 360 bài toán Số học chọn lọc:** gồm 180 bài mẫu giải chi tiết từng bước (106 bài Tầng 1 chốt điểm 9–10 thi trường + 74 bài Tầng 2 vươn tầm HSG Quận/Huyện & CLC) và 180 bài tự luyện đổi số kèm Đáp số – Hướng dẫn.
- ✓ **Hệ thống 6 Chuyên đề xuyên suốt:** mỗi chuyên đề mở đầu bằng bảng *Tóm tắt phương pháp giải nhanh*, tiếp nối bởi hệ thống bài tập phân tầng và chốt lại bằng hộp 💡 *Nhận xét* vạch rõ bẫy mất điểm.
- ✓ **Kiểm định toán học 2 vòng độc lập (SymPy):** 100% đáp số, lập luận chia hết, số nguyên tố, số chính phương và nghiệm nguyên đều được kiểm chứng tự động (360/360 PASS).
- ✓ **Phù hợp đa mục tiêu:** học sinh tự ôn luyện đạt 9–10, bồi dưỡng đội tuyển HSG Toán 6, và nguồn học liệu giảng dạy chuẩn cho giáo viên THCS.

Chuyên đề 1: Tổng dãy lũy thừa, So sánh lũy thừa & Chữ số tận cùng
Bài 1–30 (30 tinh tuyển + 30 tự luyện)

Chuyên đề 2: Quan hệ chia hết, Phép chia có dư & Đồng dư thức
Bài 31–65 (35 tinh tuyển + 35 tự luyện)

Chuyên đề 3: Số nguyên tố, Hợp số & Hai số nguyên tố cùng nhau
Bài 66–100 (35 tinh tuyển + 35 tự luyện)

Chuyên đề 4: Số chính phương & Cấu tạo số tự nhiên
Bài 101–130 (30 tinh tuyển + 30 tự luyện)

Chuyên đề 5: ƯCLN – BCNN nâng cao & Toán chia nhóm, xếp hàng có dư
Bài 131–150 (20 tinh tuyển + 20 tự luyện)

Chuyên đề 6: Phương trình nghiệm nguyên, Tìm n chia hết & Cực trị
Bài 151–180 (30 tinh tuyển + 30 tự luyện)

BIÊN SOẠN & BẢN QUYỀN

Thầy Thế Anh (ThS. Nguyễn Thế Anh)

Điện thoại / Zalo: **0986 683 218**

Website: **thaytheanh.com** • **vipstudy.vn**

Quét mã QR để nhắn Zalo cho thầy, đăng kí học thử hoặc tham gia Nhóm học tập Toán THCS – hỏi đáp bài tập trong sách & nhận bộ đề HSG mới nhất.

Zalo Thầy Thế Anh
0986 683 218

Nhóm học tập Zalo
Quét để tham gia

LỜI NÓI ĐẦU & LỘ TRÌNH SỬ DỤNG SÁCH

Các em học sinh, quý phụ huynh và quý thầy cô thân mến,

Trong chương trình Toán 6 mới (GDPT 2018), mảng **Số học nâng cao — Lũy thừa — Quan hệ chia hết — Số nguyên tố — Số chính phương — ƯCLN/BCNN và Phương trình nghiệm nguyên** chiếm hơn **70% quỹ điểm câu phân loại 9–10** ở học kì 1 và là phần lõi quyết định giải thưởng trong mọi kì thi **Học sinh giỏi Toán 6 cấp Trường, cấp Quận/Huyện**.

Quyển 1: Số học nâng cao, Lũy thừa & Chia hết mở màn cho bộ sách 5 quyển *Chinh phục điểm 9–10 & Học sinh giỏi Toán 6* do **Thầy Thế Anh** biên soạn từ kho dữ liệu hơn 168 đề thi HSG và hàng trăm đề kiểm tra định kì 2021 – 2027. Khác với tài liệu sưu tầm rời rạc, mỗi chuyên đề trong sách được cấu trúc chặt chẽ thành 3 phần: **(A) Tóm tắt phương pháp → (B) Bài tập tinh tuyển phân 2 tầng (9–10 và HSG) có lời giải chi tiết + Nhận xét → (C) Bài tập tự luyện tương tự kèm Đáp số & Hướng dẫn** giúp học sinh học tới đâu, tự làm chủ tới đó.

Chúc các em xây nền tảng Số học thật vững chắc và bứt phá ngoạn mục!
Thầy Thế Anh

LỘ TRÌNH TỰ HỌC 4 BƯỚC ĐẠT HIỆU QUẢ CAO NHẤT

Bước 1 • Nắm khung phương pháp
Đọc kĩ 4 thẻ **Phương pháp giải nhanh** ở đầu mỗi chuyên đề để ghi nhớ dấu hiệu nhận dạng và công thức cốt lõi.

Bước 2 • Chinh phục Tầng 1 trước
Làm tuần tự các bài **Tầng 1 (★☆☆ → ★★☆)** để chắc chắn 9–10 điểm thi trường; tự suy nghĩ ít nhất 10 phút trước khi đối chiếu lời giải.

Bước 3 • Thử sức Tầng 2 (HSG)
Nâng cấp tư duy với các bài **Tầng 2 (★★★)** — đọc thật kĩ hộp 💡 **Nhận xét** để học cách tư duy như người ra đề thi HSG.

Bước 4 • Luyện tay ở Phần C
Hoàn thành ngay **Bài tập tự luyện tương tự** cuối chuyên đề rồi dò *Bảng Đáp số & Hướng dẫn* để biến phương pháp thành phản xạ của riêng mình.

QUY ƯỚC PHÂN TẦNG & MỨC ĐỘ ★

Tầng / Mức độ	Kí hiệu	Mục tiêu năng lực & Đối tượng phù hợp
Tầng 1 • Nền tảng 9đ	★☆☆	Các dạng chốt 8,5 – 9,0 điểm ở đề giữa kì / cuối kì: rèn phương pháp chuẩn, trình bày không mất điểm vặt.
Tầng 1 • Chốt 9,5–10đ	★★☆	Câu vận dụng cao cuối đề trường điểm & phòng GD&ĐT: biến đổi khéo, lập bảng ước, kẹp số, chia trường hợp.
Tầng 2 • Học sinh giỏi	★★★	Đề thi HSG Quận/Huyện, Giao lưu Toán tuổi thơ & lớp CLC: đồng dư thức sơ cấp, đa biến nguyên tố, cực trị & nghiệm nguyên khó.

MỤC LỤC CHI TIẾT

Lời nói đầu & Lộ trình sử dụng sách 2

CHUYÊN ĐỀ 1. TỔNG DÃY LŨY THỪA, SO SÁNH LŨY THỪA & CHỮ SỐ TẬN CÙNG (30 + 30 bài) 4

A. Tóm tắt phương pháp & B. Hệ thống bài tinh tuyển (Bài 1 – 30) 5

C. Bài tập tự luyện tương tự & Đáp số – Hướng dẫn (30 bài) 7

CHUYÊN ĐỀ 2. QUAN HỆ CHIA HẾT, PHÉP CHIA CÓ DƯ & ĐỒNG DƯ THỨC (35 + 35 bài) 8

A. Tóm tắt phương pháp & B. Hệ thống bài tinh tuyển (Bài 31 – 65) 8

C. Bài tập tự luyện tương tự & Đáp số – Hướng dẫn (35 bài) 10

CHUYÊN ĐỀ 3. SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ & HAI SỐ NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU (35 + 35 bài) 12

A. Tóm tắt phương pháp & B. Hệ thống bài tinh tuyển (Bài 66 – 100) 13

C. Bài tập tự luyện tương tự & Đáp số – Hướng dẫn (35 bài) 15

CHUYÊN ĐỀ 4. SỐ CHÍNH PHƯƠNG & CẤU TẠO SỐ TỰ NHIÊN (30 + 30 bài) 16

A. Tóm tắt phương pháp & B. Hệ thống bài tinh tuyển (Bài 101 – 130) 16

C. Bài tập tự luyện tương tự & Đáp số – Hướng dẫn (30 bài) 19

CHUYÊN ĐỀ 5. ƯCLN – BCNN NÂNG CAO & TOÁN CHIA NHÓM, XẾP HÀNG CÓ DƯ (20 + 20 bài) 20

A. Tóm tắt phương pháp & B. Hệ thống bài tinh tuyển (Bài 131 – 150) 21

C. Bài tập tự luyện tương tự & Đáp số – Hướng dẫn (20 bài) 23

CHUYÊN ĐỀ 6. PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN, TÌM N CHIA HẾT & CỰC TRỊ (30 + 30 bài) 24

A. Tóm tắt phương pháp & B. Hệ thống bài tinh tuyển (Bài 151 – 180) 25

C. Bài tập tự luyện tương tự & Đáp số – Hướng dẫn (30 bài) 26

Nhận bản đầy đủ & Học cùng Thầy Thế Anh 28

📌 **Về Bản Đọc Thử Miễn Phí:** Bản đầy đủ gồm **135 trang A4 (180 bài tinh tuyển + 180 bài tự luyện = 360 bài).** Trong bản đọc thử này, thầy gửi tặng **trọn bộ bảng Phương pháp giải của cả 6 chuyên đề** cùng **18 bài mẫu giải chi tiết (3 bài/chuyên đề đủ Tầng 1 & Tầng 2) + 18 bài tự luyện kèm đáp số** để phụ huynh và các em đánh giá chất lượng sách trước khi đặt mua.

CHUYÊN ĐỀ 1 / 6 • TRÍCH ĐOẠN ĐỌC THỬ (3 BÀI MẪU + 3 TỰ LUYỆN)

CHUYÊN ĐỀ 1. TỔNG DÃY LŨY THỪA CÓ QUY LUẬT, SO SÁNH LŨY THỪA & CHỮ SỐ TẬN CÙNG

Các bài toán về lũy thừa với số mũ tự nhiên luôn giữ vai trò chốt điểm 9–10 trong đề kiểm tra học kì, khảo sát chất lượng đầu năm và là xương sống trong mọi đề thi Học sinh giỏi Toán 6 cấp Trường, Quận/Huyện. Chuyên đề này hệ thống hóa trọn vẹn 4 trụ cột trọng tâm: thu gọn và xét tính chia hết của tổng dãy lũy thừa, so sánh lũy thừa bằng nhiều kĩ thuật bắc cầu, giải bài toán tìm x có chứa lũy thừa và xác định 1–2 chữ số tận cùng của các lũy thừa bậc rất lớn. Mỗi bài toán đều đi kèm phân tích tư duy, lời giải chuẩn mực, nhận xét bẫy sai thường gặp và một bài tập tương tự có đáp số kiểm chứng.

A. TÓM TẮT PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH

1. Thu gọn tổng lũy thừa cấp số nhân & chia nhóm chứng minh chia hết

- **Thu gọn tổng cùng cơ số a ($a > 1$):** Với $S = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$, nhân hai vế với a rồi lấy $aS - S$ để triệt tiêu các số hạng giữa, thu được $S = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$. Nếu số mũ nhảy bước k (như $a^0, a^k, a^{2k}, \ldots$), ta nhân hai vế với a^k; nếu tổng đan dấu $a - a^2 + a^3 - \ldots$, ta nhân với a rồi **cộng** hai vế $aS + S$. - **Chia nhóm chứng minh chia hết & tìm số dư:** Đếm chính xác số hạng của tổng (lưu ý tránh sót số hạng $a^0 = 1$). Chọn kích thước nhóm m sao cho tổng m số hạng đầu chia hết cho số chia d (ví dụ cơ số 2: nhóm 2 số $\vdots 3$, nhóm 3 số $\vdots 7$, nhóm 4 số $\vdots 15$; cơ số 3: nhóm 2 số $\vdots 4$, nhóm 3 số $\vdots 13$, nhóm 4 số $\vdots 40$). Nếu tổng số hạng không chia hết cho m, tách phần dư ở đầu (hoặc cuối) để xác định số dư.

2. So sánh lũy thừa (cùng cơ số, cùng số mũ, lũy thừa trung gian)

- **Đưa về cùng cơ số hoặc cùng số mũ:** Dùng $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ và $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$. Với $a > b > 0, n > 0$ thì $a^n > b^n$; với $a > 1, m > n$ thì $a^m > a^n$. Khi tìm số mũ chung, lấy ƯCLN của hai số mũ. - **Kĩ thuật lũy thừa trung gian & phân số lũy thừa:** Khi cơ số và số mũ đều lệch nhau, làm tròn cơ số tới số đẹp gần nhất là tích các lũy thừa nhỏ (như $71 < 72 = 2^3 \cdot 3^2, 37 > 36 = 2^2 \cdot 3^2$, $31 < 32 = 2^5, 17 > 16 = 2^4$). Với phân số dạng $\dfrac{a^n \pm 1}{a^{n+1} \pm 1}$, nhân cả hai phân số với a để tách phần nguyên 1 rồi so sánh phần thừa/phần bù.

3. Tìm x chứa lũy thừa & kết hợp tổng dãy lũy thừa

- **Đặt thừa số chung & đồng nhất mũ:** Với tổng các lũy thừa cùng cơ số như $a^x + a^{x+1} + \cdots + a^{x+k}$, luôn đặt a^x làm thừa số chung: $a^x(1 + a + \cdots + a^k)$ rồi rút gọn về dạng $a^x = a^m \implies x = m$ ($a > 1$). - **Cảnh giác nghiệm đặc biệt & bài toán kẹp:** Với $A^m = A^n$ ($m > n \geq 1$), viết thành $A^n(A^{m-n} - 1) = 0$ để không bỏ sót $A = 0$, $A = 1$, và **cả** $A = -1$ **nếu** $m - n$ **chẵn**. Với dạng kẹp $p < a^{f(x)} < q$, chặn p, q giữa hai lũy thừa liên tiếp của a để tìm giá trị nguyên của $f(x)$.

4. Tìm chữ số tận cùng (1 chữ số theo chu kì 1/2/4 & 2 chữ số tận cùng mod 100)

- **1 chữ số tận cùng:** Cơ số tận cùng $0, 1, 5, 6$ có chu kì 1 (mũ $n \in \mathbb{N}^*$ giữ nguyên chữ số tận cùng). Cơ số tận cùng $4, 9$ có chu kì 2 (mũ chẵn $\to 6, 1$; mũ lẻ $\to 4, 9$). Cơ số tận cùng $2, 3, 7, 8$ có chu kì 4: viết số mũ $n = 4k + r$ ($r \in \{1; 2; 3; 4\}$) rồi lấy chữ số tận cùng của a^r. Với lũy thừa tầng a^{b^c}, cần tìm số dư của b^c khi chia cho 4. - **2 chữ số tận cùng (xét theo số dư khi chia cho 100):** Ghi nhớ các "mốc vàng" bất biến: $2^{20} \equiv 76, 6^5 \equiv 76$ (và $76^k \equiv 76 \pmod{100}$ với mọi $k \geq 1$); $7^4 = 2401 \equiv 01, 3^{20} \equiv 01, 9^{10} \equiv 01 \pmod{100}$; đặc biệt $3^{20} \equiv 01 \pmod{200}$ rất hữu ích khi tổng cần chia cho 2.

B. HỆ THỐNG BÀI TẬP TINH TUYỂN & LỜI GIẢI CHI TIẾT

TẦNG 1: CHỐT ĐIỂM 9 – 10 THI TRƯỜNG & KHẢO SÁT (2 BÀI)

Bài 1 Thu gọn tổng lũy thừa cơ số 2 & rút gọn phân số • Tầng 1 • 9–10đ ★☆☆

Tính giá trị của biểu thức:

$$Q = \frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2023}}{2^{2025} - 2}$$

(Nguồn: Đề khảo sát đội dự tuyển HSG Toán 6 năm 2025–2026, Trường THCS TT Bến Sung (Thanh Hóa))

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Đặt tử số là $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2023}$.

Nhân cả hai vế của A với 2, ta được:

$$2A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{2024}$$

Lấy $2A - A$, các số hạng từ 2 đến 2^{2023} triệt tiêu nhau:

$$2A - A = (2 + 2^2 + \cdots + 2^{2024}) - (1 + 2 + \cdots + 2^{2023}) = 2^{2024} - 1$$

Suy ra $A = 2^{2024} - 1$.

Xét mẫu số của Q, ta đặt thừa số chung 2:

$$2^{2025} - 2 = 2 \cdot (2^{2024} - 1)$$

Thay vào biểu thức Q, ta có:

$$Q = \frac{2^{2024} - 1}{2 \cdot (2^{2024} - 1)} = \frac{1}{2}$$

Vậy $Q = \frac{1}{2}$.

NHẬN XÉT: Kĩ thuật kinh điển "nhân với cơ số rồi trừ đi tổng ban đầu" giúp thu gọn tức thì mọi tổng cấp số nhân. Cần tinh ý tách thừa số chung ở mẫu số ($2^{2025} - 2 = 2(2^{2024} - 1)$) để rút gọn toàn bộ cụm $2^{2024} - 1$, tuyệt đối không rút gọn rời rạc từng số hạng ở tử và mẫu.

Bài 10 Tìm x với phương trình lũy thừa đặc biệt và điều kiện kẹp • Tầng 1 • 9–10đ ★★☆

Tìm tất cả các số tự nhiên x thỏa mãn:

a) $(x - 4)^5 = (x - 4)^4$;

b) $100 < 5^{2x-1} < 5^5$.

(Nguồn: Đề thi chọn HSG năng khiếu Toán 6 năm 2023–2024, Phòng GD&ĐT Thanh Thủy (Phú Thọ))

LỜI GIẢI CHI TIẾT

a) Từ $(x - 4)^5 = (x - 4)^4$, chuyển vế và đặt $(x - 4)^4$ làm thừa số chung:

$$(x - 4)^5 - (x - 4)^4 = 0$$
$$(x - 4)^4 \cdot [(x - 4) - 1] = 0$$
$$(x - 4)^4 \cdot (x - 5) = 0$$

Suy ra một trong hai thừa số bằng 0:

- Trường hợp 1: $(x-4)^4 = 0 \implies x-4=0 \implies x=4$ (thỏa mãn $x \in \mathbb{N}$).
- Trường hợp 2: $x-5=0 \implies x=5$ (thỏa mãn $x \in \mathbb{N}$).

Vậy $x \in \{4;5\}$.

b) Ta có $5^2 = 25 < 100 < 125 = 5^3$. Do đó bất đẳng thức $100 < 5^{2x-1} < 5^5$ trở thành:

$$5^2 < 100 < 5^{2x-1} < 5^5 \implies 5^3 \le 5^{2x-1} < 5^5$$

Suy ra $3 \le 2x-1 < 5$. Vì $x \in \mathbb{N}$ nên $2x-1$ là số tự nhiên lẻ, do đó chỉ có thể:

$$2x-1=3 \implies 2x=4 \implies x=2$$

Thử lại: $5^{2\cdot 2-1} = 5^3 = 125$, thỏa mãn $100 < 125 < 3125$. Vậy $x=2$.

NHẬN XÉT: TUYỆT ĐỐI KHÔNG chia cả hai vế của $(x-4)^5 = (x-4)^4$ cho $(x-4)^4$ vì sẽ làm mất nghiệm $x=4$ (khi cơ số bằng 0). Đặc biệt, nếu hiệu hai số mũ là **số chẵn** (như ở bài tập tương tự bên dưới), phương trình $t^{2k}=1$ còn có thêm nghiệm $t=-1$!

TẦNG 2: VƯƠN TẦM HỌC SINH GIỎI QUẬN/HUYỆN & CLC (1 BÀI)

Bài 19 Thu gọn tổng lũy thừa đan dấu và chứng minh chia hết • Tầng 2 • HSG ★★★

Cho biểu thức $B = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + 3^5 - \cdots + 3^{2023} - 3^{2024}$.

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Chứng minh rằng B chia hết cho 20.

(Nguồn: Đề thi chọn HSG Toán 6 năm 2025–2026, Xã Xuân Tín (Thanh Hóa))

LỜI GIẢI CHI TIẾT

a) Nhân cả hai vế của B với 3, ta được:

$$3B = 3^2 - 3^3 + 3^4 - 3^5 + \cdots + 3^{2024} - 3^{2025}$$

Vì dấu của các số hạng đồng bậc trong B và $3B$ trái ngược nhau, ta **cộng** hai đẳng thức theo từng vế:

$$3B + B = (3^2 - 3^3 + 3^4 - \cdots + 3^{2024} - 3^{2025}) + (3 - 3^2 + 3^3 - \cdots + 3^{2023} - 3^{2024})$$

Các số hạng từ 3^2 đến 3^{2024} triệt tiêu nhau hoàn toàn, còn lại:

$$4B = 3 - 3^{2025}$$

Suy ra:

$$B = \frac{3 - 3^{2025}}{4}$$

b) Tổng B có 2024 số hạng. Vì $2024 = 4 \cdot 506$, ta chia B thành 506 nhóm, mỗi nhóm gồm 4 số hạng liên tiếp:

$$B = (3 - 3^2 + 3^3 - 3^4) + (3^5 - 3^6 + 3^7 - 3^8) + \cdots + (3^{2021} - 3^{2022} + 3^{2023} - 3^{2024})$$

$$B = (3 - 3^2 + 3^3 - 3^4) \cdot (1 + 3^4 + 3^8 + \cdots + 3^{2020})$$

Tính giá trị của nhóm đầu tiên:

$$3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 = 3 - 9 + 27 - 81 = -60 = 20 \cdot (-3)$$

Vì $-60 \vdots 20$ nên $B = -60 \cdot (1 + 3^4 + \cdots + 3^{2020}) \vdots 20$ (điều phải chứng minh).

NHẬN XÉT: Cạm bẫy chết người ở bài toán tổng đan dấu: nhiều học sinh quen tay viết $4B = 3^{2025} - 3$ mà quên để ý dấu trừ trước 3^{2025}! Kiểm tra nhanh bằng dấu: số hạng lớn nhất là -3^{2024} mang dấu âm nên $B < 0$, do đó kết quả đúng phải là $\dfrac{3 - 3^{2025}}{4} < 0$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN TƯƠNG TỰ — ĐỔI SỐ & BIẾN THỂ (3 BÀI)

Bài tự luyện 1.1. (Tương tự Bài 1) Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{2025}}{3^{2027} - 3}$.

Bài tự luyện 1.2. (Tương tự Bài 10) Tìm tất cả các số tự nhiên x thỏa mãn: a) $(x-2)^6 = (x-2)^4$; b) $50 < 2^{3x-2} < 2^9$.

Bài tự luyện 1.3. (Tương tự Bài 19) Rút gọn tổng đan dấu $C = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \cdots + 2^{2023} - 2^{2024}$ và chứng minh rằng C chia hết cho 10.

ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN VẮN TẮT — CHUYÊN ĐỀ 1

Bài	Đáp số / Kết luận	Hướng dẫn mấu chốt
Bài 1.1	$P = \dfrac{1}{6}$.	Đặt tử số là M, tính $3M - M = 2M = 3^{2026} - 1$ rồi tách mẫu số thành $3(3^{2026} - 1)$.
Bài 1.2	a) $x \in \{1; 2; 3\}$; b) $x = 3$.	a) Đưa về $(x-2)^4\left[(x-2)^2 - 1\right] = 0$, chú ý $(x-2)^2 = 1$ có 2 giá trị $x - 2 = 1$ và $x - 2 = -1$. b) Vì $2^5 < 50 < 2^6$ nên $6 \le 3x - 2 \le 8$.
Bài 1.3	$C = \dfrac{2 - 2^{2025}}{3}$ và $C = -10 \cdot (1 + 2^4 + \cdots + 2^{2020}) \vdots 10$.	Tính $2C + C = 3C = 2 - 2^{2025}$. Để chứng minh chia hết cho 10, ghép nhóm 4 số hạng liên tiếp vì $2 - 4 + 8 - 16 = -10$.

CHUYÊN ĐỀ 2 / 6 • TRÍCH ĐOẠN ĐỌC THỬ (3 BÀI MẪU + 3 TỰ LUYỆN)

CHUYÊN ĐỀ 2. QUAN HỆ CHIA HẾT, PHÉP CHIA CÓ DƯ & ĐỒNG DƯ THỨC SƠ CẤP

Quan hệ chia hết, phép chia có dư và đồng dư thức sơ cấp là xương sống của số học lớp 6, xuất hiện dày đặc ở cả câu chốt điểm 9–10 trong đề kiểm tra học kì lẫn các đề thi học sinh giỏi Quận/Huyện và trường chất lượng cao. Làm chủ các dấu hiệu chia hết hợp số, kĩ thuật tách bội số, bài toán số dư ngược và phép tính đồng dư giúp học sinh giải gọn nhiều bài toán lũy thừa bậc cao mà không cần tính giá trị cụ thể. Chuyên đề này hệ thống hóa 35 bài toán cốt lõi kèm 35 bài tự luyện tương đương, dẫn dắt từ nền tảng chắc chắn đến tư duy Olympic THCS.

A. TÓM TẮT PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH

1. Tính chất chia hết của tổng, hiệu, tích & kĩ thuật tách bội số

Nếu $a \vdots m$ và $b \vdots m$ thì $(a \pm b) \vdots m$; nếu $a \vdots m$ và $b \not\vdots m$ thì $(a \pm b) \not\vdots m$. Trong một tích, chỉ cần một thừa số chia hết cho m thì tích chia hết cho m. Khi chứng minh $A(x,y) \vdots m$ suy ra $B(x,y) \vdots m$, hãy tạo tổ hợp tuyến tính $uA \pm vB$ chia hết cho m với $\text{ƯCLN}(v,m)=1$, hoặc tách biểu thức chứa ẩn theo dạng $P(n)=Q(n)\cdot D(n)+c$ để đưa về tìm ước của hằng số c.

2. Dấu hiệu chia hết & tách thừa số nguyên tố cùng nhau

Ghi nhớ các dấu hiệu cơ bản: chia hết cho $2, 5$ (chữ số tận cùng); $4, 25$ (hai chữ số tận cùng); $8, 125$ (ba chữ số tận cùng); $3, 9$ (tổng các chữ số); 11 (hiệu giữa tổng các chữ số hàng lẻ và tổng các chữ số hàng chẵn chia hết cho 11). Để xét chia hết cho hợp số m, ta phân tích $m = p \cdot q$ với $\text{ƯCLN}(p,q)=1$: chẳng hạn $6=2\cdot 3$, $12=3\cdot 4$, $15=3\cdot 5$, $18=2\cdot 9$, $36=4\cdot 9$, $45=5\cdot 9$, $72=8\cdot 9$, $99=9\cdot 11$, $396=4\cdot 9\cdot 11$.

3. Phép chia có dư & xét số dư theo nhóm

Mọi số tự nhiên a khi chia cho b ($b \neq 0$) đều viết duy nhất dưới dạng $a=bq+r$ với $q, r \in \mathbb{N}$ và $0 \leq r < b$ (luôn kiểm tra chặt điều kiện $r<b$). Với tổng lũy thừa, hãy nhóm k số hạng liên tiếp tạo thừa số chia hết cho số chia rồi xét phần dư còn lại. Với hệ điều kiện số dư, tìm số cộng thêm hoặc bớt đi sao cho chia hết đồng thời cho các số chia (quy về BCNN).

4. Đồng dư thức sơ cấp & ứng dụng lũy thừa bậc cao

Hai số nguyên a, b đồng dư theo môđun m ($m \in \mathbb{N}^*$), kí hiệu $a \equiv b \pmod m$, khi $(a-b) \vdots m$ (tức a và b có cùng số dư khi chia cho m). Các phép toán bảo toàn đồng dư: nếu $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$ thì $a \pm c \equiv b \pm d \pmod m$, $ac \equiv bd \pmod m$, và $a^n \equiv b^n \pmod m$ ($n \in \mathbb{N}$). Để hạ bậc lũy thừa a^N theo môđun m, hãy tìm số mũ nhỏ k sao cho $a^k \equiv 1$ hoặc $-1 \pmod m$.

B. HỆ THỐNG BÀI TẬP TINH TUYỂN & LỜI GIẢI CHI TIẾT

TẦNG 1: CHỐT ĐIỂM 9 – 10 THI TRƯỜNG & KHẢO SÁT (2 BÀI)

Bài 31 Tính chất chia hết của tổng, hiệu • Tầng 1 • 9–10đ ★☆☆

Chứng minh rằng tổng của 3 số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3, còn tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4.

(Nguồn: Tuyển chọn ôn thi HSG Toán 6 – Chuyên đề Phép chia hết (tài liệu tổng hợp 2024 – 2025))

LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Chứng minh tổng của 3 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 3:

Gọi 3 số tự nhiên liên tiếp là a, $a+1$, $a+2$ ($a \in \mathbb{N}$). Tổng của chúng là:

$$S_3 = a + (a+1) + (a+2) = 3a + 3 = 3(a+1)$$

Vì $a+1 \in \mathbb{N}$ và $3 \vdots 3$ nên $3(a+1) \vdots 3$. Vậy $S_3 \vdots 3$.

2) Chứng minh tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4:

Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là a, $a+1$, $a+2$, $a+3$ ($a \in \mathbb{N}$). Tổng của chúng là:

$$S_4 = a + (a+1) + (a+2) + (a+3) = 4a + 6$$

Vì $4a \vdots 4$ nhưng $6 \not\vdots 4$ nên theo tính chất chia hết của một tổng, $4a + 6 \not\vdots 4$.

Vậy tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4.

> **NHẬN XÉT:** Không phải lúc nào tổng của n số tự nhiên liên tiếp cũng chia hết cho n: điều này chỉ đúng khi n là số lẻ ($n = 2k+1$); khi n chẵn, tổng luôn chia cho n dư $\frac{n}{2}$.

Bài 41 Dấu hiệu chia hết cho 45 (tách 5 và 9) • Tầng 1 • 9–10đ ★★☆

Tìm tất cả các cặp chữ số (x, y) sao cho số $\overline{18x2y}$ chia hết cho 45.

(Nguồn: Đề khảo sát chọn nguồn HSG vòng 5 Toán 6 năm học 2024 – 2025, Phòng GD&ĐT Đông Hưng – Thái Bình)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Điều kiện $x, y \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$.

Vì $45 = 5 \cdot 9$ và $\text{ƯCLN}(5, 9) = 1$, nên $\overline{18x2y} \vdots 45$ khi và chỉ khi $\overline{18x2y} \vdots 5$ và $\overline{18x2y} \vdots 9$.

- Để $\overline{18x2y} \vdots 5$, chữ số tận cùng y phải thuộc $\{0; 5\}$.
- Để $\overline{18x2y} \vdots 9$, tổng các chữ số phải chia hết cho 9:

$$(1 + 8 + x + 2 + y) \vdots 9 \iff (11 + x + y) \vdots 9$$

Xét từng trường hợp của y:

- **Trường hợp 1:** $y = 0 \implies (11 + x) \vdots 9$. Do $0 \le x \le 9$ nên $11 + x = 18 \implies x = 7$. Ta được cặp $(7, 0)$.
- **Trường hợp 2:** $y = 5 \implies (16 + x) \vdots 9$. Do $0 \le x \le 9$ nên $16 + x = 18 \implies x = 2$. Ta được cặp $(2, 5)$.

Vậy có 2 cặp chữ số (x, y) thỏa mãn là $(7, 0)$ và $(2, 5)$ (các số 18720 và 18225).

> **NHẬN XÉT:** Với số chia $45 = 5 \cdot 9$ hay $15 = 3 \cdot 5$, luôn nhớ ghi rõ lập luận $\text{ƯCLN}(5, 9) = 1$ (hoặc $\text{ƯCLN}(3, 5) = 1$) trước khi tách thành hai điều kiện độc lập — đây là ý ăn điểm bắt buộc trong biểu điểm tự luận.

TẦNG 2: VƯƠN TẦM HỌC SINH GIỎI QUẬN/HUYỆN & CLC (1 BÀI)

Bài 51 Chứng minh chia hết biểu thức lũy thừa bằng tách nhân tử • Tầng 2 • HSG ★★★

Chứng minh rằng:

a) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, biểu thức $A = 3^{n+3} - 2 \cdot 3^n + 2^{n+5} - 7 \cdot 2^n$ chia hết cho 25;

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, biểu thức $B = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10.

(Nguồn: Tuyển chọn ôn thi HSG Toán 6 – Chuyên đề Phép chia hết (tài liệu tổng hợp 2024 – 2025))

LỜI GIẢI CHI TIẾT

a) Chứng minh $A \vdots 25$ với mọi $n \in \mathbb{N}$:

Nhóm các lũy thừa cùng cơ số rồi đặt thừa số chung:

$$A = (3^{n+3} - 2 \cdot 3^n) + (2^{n+5} - 7 \cdot 2^n)$$
$$= 3^n(3^3 - 2) + 2^n(2^5 - 7)$$
$$= 3^n(27 - 2) + 2^n(32 - 7) = 25 \cdot 3^n + 25 \cdot 2^n = 25(3^n + 2^n)$$

Vì $3^n + 2^n \in \mathbb{N}$ và $25 \vdots 25$ nên $A \vdots 25$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

b) Chứng minh $B \vdots 10$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

Nhóm các hạng tử cùng cơ số:

$$B = (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n)$$
$$= 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) = 10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n$$

Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n \geq 1$, do đó $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$ với $2^{n-1} \in \mathbb{N}$. Suy ra:

$$B = 10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} = 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^{n-1} = 10(3^n - 2^{n-1})$$

Vì $3^n - 2^{n-1} \in \mathbb{Z}$ và $10 \vdots 10$ nên $B \vdots 10$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

NHẬN XÉT: Chú ý vai trò của điều kiện $n \in \mathbb{N}^*$ ở câu b: nhờ $n \geq 1$ mà ta mới tách được một thừa số 2 từ 2^n để ghép với 5 thành 10 (nếu $n = 0$ thì $B = 9 - 4 + 1 - 1 = 5 \not\vdots 10$!).

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN TƯƠNG TỰ — ĐỔI SỐ & BIẾN THỂ (3 BÀI)

Bài tự luyện 2.1. (Tương tự Bài 31) Chứng minh rằng tổng của 5 số tự nhiên chẵn liên tiếp luôn chia hết cho 10, còn tổng của 5 số tự nhiên lẻ liên tiếp chia cho 10 luôn dư 5.

Bài tự luyện 2.2. (Tương tự Bài 41) Tìm tất cả các cặp chữ số (x, y) sao cho số $\overline{47x5y}$ chia hết cho 45.

Bài tự luyện 2.3. (Tương tự Bài 51) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, biểu thức $C = 3^{n+2} - 2^{n+3} + 3^n - 2^{n+2}$ chia hết cho 6.

ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN VẮN TẮT — CHUYÊN ĐỀ 2

Bài	Đáp số / Kết luận	Hướng dẫn mấu chốt
Bài 2.1	**Tổng 5 số chẵn liên tiếp là** $10k+20=10(k+2)\vdots 10$**; tổng 5 số lẻ liên tiếp là** $10k+25=10(k+2)+5$ **chia cho** 10 **dư** 5**.**	Biểu diễn 5 số chẵn liên tiếp là $2k, 2k+2, 2k+4, 2k+6, 2k+8$ và 5 số lẻ liên tiếp là $2k+1, 2k+3, 2k+5, 2k+7, 2k+9$ ($k\in\mathbb{N}$).
Bài 2.2	**Các cặp** (x,y) **là** $(2,0)$ **và** $(6,5)$ **(các số** 47250 **và** 47655**).**	Tách $45=5\cdot 9$ với $\text{ƯCLN}(5,9)=1$, xét lần lượt $y=0$ và $y=5$.
Bài 2.3	$C=10\cdot 3^n-12\cdot 2^n=30\cdot 3^{n-1}-12\cdot 2^n=6(5\cdot 3^{n-1}-2^{n+1})\vdots 6.$	Đặt thừa số chung 3^n và 2^n, rồi tách $3^n=3\cdot 3^{n-1}$ khi $n\geq 1$.

CHUYÊN ĐỀ 3 / 6 • TRÍCH ĐOẠN ĐỌC THỬ (3 BÀI MẪU + 3 TỰ LUYỆN)

CHUYÊN ĐỀ 3. SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ & CHỨNG MINH HAI SỐ NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU

Số nguyên tố, hợp số và hai số nguyên tố cùng nhau là "mỏ vàng" ra đề cho câu phân loại 9–10 trong đề kiểm tra cuối học kì 1 cũng như các bài tự luận 2–4 điểm trong đề thi Học sinh giỏi Toán 6 cấp Quận/Huyện. Khác với các bài tính toán thuần túy, chuyên đề này rèn luyện tư duy chia trường hợp sắc bén (xét tính chẵn lẻ, số dư chia cho 3, 5, 6) và kĩ thuật khử ẩn tìm ước chung lớn nhất. Làm chủ 35 bài toán trọng tâm dưới đây sẽ giúp các em tự tin xử lí trọn vẹn từ dạng tìm số nguyên tố cơ bản đến các bài toán lũy thừa nguyên tố và đếm số phân số tối giản nâng cao.

A. TÓM TẮT PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH

1. Kĩ thuật xét tính chẵn lẻ ($p = 2$) & xét số dư chia cho $3, 5, 6$

- **Số 2 là số nguyên tố chẵn duy nhất:** Mọi số nguyên tố $p > 2$ đều lẻ. Nếu tổng (hoặc hiệu) của hai số nguyên tố là số lẻ thì chắc chắn một trong hai số phải bằng 2. - **Xét số dư chia cho 3:** Mọi số nguyên tố p chỉ có thể là $p = 3$, $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Khi đề cho nhiều biểu thức dạng $p + a$, $p + b$, hãy thay từng dạng vào để loại các trường hợp tạo ra bội của 3 lớn hơn 3. - **Mở rộng:** Với 4–5 biểu thức của p, ta xét số dư chia cho 5 ($p = 5$ hoặc $5k + r$ với $r \in \{1; 2; 3; 4\}$) hoặc chia cho 6.

2. Chứng minh một số tự nhiên A là hợp số

- **Cách 1 (Chỉ ra ước thực sự):** Chứng minh tồn tại một số tự nhiên d sao cho $A \vdots d$ và $1 < d < A$ (thường chọn $d \in \{2; 3; 5; 7; 11\}$ nhờ tính chẵn lẻ, tổng chữ số hoặc chữ số tận cùng). - **Cách 2 (Phân tích thành tích):** Biến đổi $A = B \cdot C$ với $B, C \in \mathbb{N}$ và $B > 1, C > 1$. - **Lưu ý sống còn:** Luôn phải chỉ rõ $A > d$ (hoặc cả hai thừa số đều lớn hơn 1), tránh mất điểm vì trường hợp $A = d$ là số nguyên tố.

3. Tính chất vàng của số nguyên tố $p > 3$

- **Dạng biểu diễn:** Mọi số nguyên tố $p > 3$ đều không chia hết cho 2 và 3, nên có dạng $p = 6k + 1$ hoặc $p = 6k - 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$). - **Tính chất bình phương:** Với mọi số nguyên tố $p > 3$, ta luôn có:

$$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1) \vdots 24$$

- **Hệ quả hay dùng:** Mọi số nguyên tố $p > 3$ có p^2 chia cho 3 dư 1, chia cho 8 dư 1 và chia cho 24 dư 1; hiệu bình phương hai số nguyên tố lớn hơn 3 luôn chia hết cho 24.

4. Chứng minh hai số nguyên tố cùng nhau & phân số tối giản

- **Thuật toán khử ẩn:** Để chứng minh $\text{ƯCLN}(A, B) = 1$ (hoặc phân số $\dfrac{A}{B}$ tối giản), gọi $d = \text{ƯCLN}(A, B)$ ($d \in \mathbb{N}^*$). Từ $A \vdots d$ và $B \vdots d$, nhân hai biểu thức với hệ số thích hợp rồi cộng hoặc trừ để khử ẩn n, thu được $k \vdots d$ (k là hằng số dương). - **Hoàn tất chứng minh:** Nếu $k = 1$ thì kết luận ngay $d = 1$. Nếu $k = 2$, kết hợp tính lẻ của A hoặc B để loại $d = 2$. Nếu $k > 1$ bất kì, phân tích k ra thừa số nguyên tố để tìm điều kiện của n sao cho A, B không cùng chia hết cho các ước nguyên tố của k.

B. HỆ THỐNG BÀI TẬP TINH TUYỂN & LỜI GIẢI CHI TIẾT

TẦNG 1: CHỐT ĐIỂM 9 – 10 THI TRƯỜNG & KHẢO SÁT (2 BÀI)

Bài 66 Tìm số nguyên tố bằng tính chẵn lẻ ($p = 2$) • Tầng 1 • 9–10đ ★☆☆

a) Tìm hai số nguyên tố có tổng bằng 309.

b) Tổng của hai số nguyên tố có thể bằng 2025 được không? Vì sao?

(Nguồn: Tuyển chọn từ Chuyên đề Số nguyên tố & Hợp số bồi dưỡng HSG Toán 6)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

a) Tìm hai số nguyên tố có tổng bằng 309:

Gọi hai số nguyên tố cần tìm là p và q ($p \le q$). Theo đề bài, ta có $p + q = 309$.

Vì 309 là một số lẻ nên hai số p và q phải khác tính chẵn lẻ, tức là có một số chẵn và một số lẻ.

Mà 2 là số nguyên tố chẵn duy nhất và $p \le q$, nên suy ra $p = 2$.

Khi đó số nguyên tố còn lại là:

$$q = 309 - 2 = 307$$

Kiểm tra tính nguyên tố của 307: vì $17^2 = 289 < 307 < 324 = 18^2$, ta thử chia 307 cho các số nguyên tố không vượt quá 17 là $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$ thấy 307 không chia hết cho số nào. Do đó 307 là số nguyên tố.

Vậy hai số nguyên tố cần tìm là 2 và 307.

b) Xét tổng của hai số nguyên tố bằng 2025:

Giả sử tồn tại hai số nguyên tố p, q ($p \le q$) sao cho $p + q = 2025$.

Vì 2025 là số lẻ nên một trong hai số phải là số nguyên tố chẵn, suy ra $p = 2$.

Khi đó $q = 2025 - 2 = 2023$.

Tuy nhiên, ta thấy $2023 = 7 \cdot 289 = 7 \cdot 17^2$, nên 2023 chia hết cho 7 và $2023 > 7$, do đó 2023 là hợp số (mâu thuẫn với q là số nguyên tố).

Vậy tổng của hai số nguyên tố không thể bằng 2025.

NHẬN XÉT: Gặp bài toán tổng (hoặc hiệu) của hai số nguyên tố bằng một số lẻ, phản xạ đầu tiên là chốt ngay một số phải bằng 2. Đừng bao giờ quên bước kiểm tra xem số còn lại có thực sự là số nguyên tố hay không — bẫy năm thi $2025 - 2 = 2023 = 7 \cdot 17^2$ rất hay xuất hiện!

Bài 76 Chứng minh hợp số dạng số có nhiều chữ số giống nhau • Tầng 1 • 9–10đ ★★☆

Chứng minh rằng hai số sau đều là hợp số:

a) $A = \underbrace{111\ldots1}_{\text{2026 chữ số 1}}$;

b) $B = \underbrace{111\ldots1}_{\text{2025 chữ số 1}}$.

(Nguồn: Đề ôn luyện Chốt điểm 9–10 Toán 6 – Thầy Thế Anh biên soạn)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

a) Chứng minh A là hợp số:

Vì $2026 = 2 \cdot 1013$ là số chẵn nên ta tách A thành 1013 nhóm, mỗi nhóm gồm hai chữ số 11:

$$A = 11 \cdot 10^{2024} + 11 \cdot 10^{2022} + \cdots + 11 \cdot 10^2 + 11$$
$$A = 11 \cdot (10^{2024} + 10^{2022} + \cdots + 10^2 + 1)$$

Suy ra $A \vdots 11$. Mặt khác, A có 2026 chữ số nên $A > 11$.

Do đó A có ước là 11 khác 1 và A, vậy A là hợp số.

b) Chứng minh B là hợp số:

Tổng các chữ số của B là:

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{2025 \text{ số hạng}} = 2025$$

Vì 2025 có tổng các chữ số bằng $2 + 0 + 2 + 5 = 9 \vdots 9$, nên $2025 \vdots 9$ (và $2025 \vdots 3$).

Theo dấu hiệu chia hết cho 9, suy ra $B \vdots 9$ (cũng suy ra $B \vdots 3$).

Mà B có 2025 chữ số nên $B > 9$.

Vậy B là hợp số.

> **NHẬN XÉT:** Mở rộng tổng quát: Số $R_k = \underbrace{111\ldots1}_{k \text{ chữ số } 1}$ nếu có số chữ số k là hợp số (ví dụ $k = m \cdot n$ với $m, n > 1$) thì R_k chắc chắn chia hết cho R_m và R_n, nên luôn là hợp số! Đặc biệt k chẵn $\Longrightarrow R_k \vdots 11$; $k \vdots 3 \Longrightarrow R_k \vdots 3$.

TẦNG 2: VƯƠN TẦM HỌC SINH GIỎI QUẬN/HUYỆN & CLC (1 BÀI)

Bài 86 Số nguyên tố dạng lũy thừa $2^p + p^2$ • Tầng 2 • HSG ★★★

Tìm tất cả các số nguyên tố p để $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

(Nguồn: Đề giao lưu HSG Toán 6 năm học 2025 – 2026, xã Hoa Lộc – Thanh Hóa (Câu 3.2))

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ta xét các trường hợp của số nguyên tố p:

- **Trường hợp 1:** $p = 2$.

Ta có $2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$, là hợp số (loại).

- **Trường hợp 2:** $p = 3$.

Ta có $2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17$, là số nguyên tố (thỏa mãn).

- **Trường hợp 3:** $p > 3$.

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ và p không chia hết cho 3.

  - **Xét 2^p khi chia cho 3:** Vì p lẻ nên đặt $p = 2m + 1$ ($m \in \mathbb{N}^*$). Ta có:

$$2^p + 1 = 2^{2m+1} + 1 = 2 \cdot 4^m + 1$$

Do 4 chia 3 dư 1 nên 4^m chia 3 dư 1, suy ra $2 \cdot 4^m$ chia 3 dư 2, tức là $2^p + 1 \vdots 3$ *(nói cách khác, 2^p chia 3 dư 2)*.

  - **Xét p^2 khi chia cho 3:** Vì $p \not\vdots 3$ nên $p = 3k \pm 1$, suy ra $p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \vdots 3$ *(tức p^2 chia 3 dư 1)*.

- Cộng hai kết quả trên, ta được:

$$2^p + p^2 = (2^p + 1) + (p^2 - 1) \vdots 3$$

Mặt khác, với $p > 3$ thì $2^p + p^2 > 2^3 + 3^2 = 17 > 3$, nên $2^p + p^2$ là hợp số (loại).

Vậy $p = 3$ là số nguyên tố duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.

NHẬN XÉT: Tuyệt chiêu tách cặp "bù trừ" cực đẹp cho Toán 6: viết $2^p + p^2 = (2^p + 1) + (p^2 - 1)$, cả hai ngoặc đều chia hết cho 3 khi $p > 3$! Hãy ghi nhớ cặp bổ đề: với p lẻ thì $2^p + 1 \vdots 3$, còn với $p \not\vdots 3$ thì $p^2 - 1 \vdots 3$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN TƯƠNG TỰ — ĐỔI SỐ & BIẾN THỂ (3 BÀI)

Bài tự luyện 3.1. (Tương tự Bài 66) a) Tìm hai số nguyên tố có tổng bằng 2029. b) Tổng của ba số nguyên tố có thể bằng 1012 không? Nếu có, hãy tìm số nguyên tố nhỏ nhất trong ba số đó và chỉ ra một bộ ba thỏa mãn.

Bài tự luyện 3.2. (Tương tự Bài 76) Chứng minh rằng các số sau đều là hợp số: a) $M = \underbrace{333\ldots3}_{\text{2025 chữ số 3}} + 555$; b) $N = 10^{2025} + 8$.

Bài tự luyện 3.3. (Tương tự Bài 86) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $3^p + p^3$ là số nguyên tố.

ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN VẮN TẮT — CHUYÊN ĐỀ 3

Bài	Đáp số / Kết luận	Hướng dẫn mấu chốt
Bài 3.1	**a) Hai số cần tìm là 2 và 2027. b) Có thể; số nhỏ nhất chắc chắn là 2 (chẳng hạn bộ ba $2; 13; 997$ vì $2 + 13 + 997 = 1012$).**	a) Tổng lẻ nên có một số bằng 2. b) Tổng của 3 số lẻ là số lẻ, mà 1012 là số chẵn nên trong 3 số phải có ít nhất một số chẵn.
Bài 3.2	**Cả M và N đều là hợp số ($M \vdots 3, M > 3$; $N \vdots 9$ và $N \vdots 2, N > 9$).**	a) Xét chia hết cho 3. b) N có tổng các chữ số bằng $1 + 8 = 9$, hoặc N là số chẵn lớn hơn 2.
Bài 3.3	**$p = 2$ (khi đó $3^2 + 2^3 = 17$ là số nguyên tố; mọi $p > 2$ cho tổng chẵn lớn hơn 2).**	Thử $p = 2$. Với mọi số nguyên tố $p > 2$, cả 3^p và p^3 đều lẻ nên tổng của chúng như thế nào?

CHUYÊN ĐỀ 4 / 6 • TRÍCH ĐOẠN ĐỌC THỬ (3 BÀI MẪU + 3 TỰ LUYỆN)

CHUYÊN ĐỀ 4. SỐ CHÍNH PHƯƠNG & BÀI TOÁN CẤU TẠO SỐ TỰ NHIÊN

Số chính phương và bài toán cấu tạo số tự nhiên là hai mảng kiến thức trọng tâm thường xuyên giữ vai trò câu chốt điểm 9–10 trong đề kiểm tra học kì và các câu phân loại sắc bén trong đề thi Học sinh giỏi Toán 6. Nắm vững chữ số tận cùng, số dư theo mô-đun $3, 4, 5, 8$, cấu trúc số mũ chẵn khi phân tích thừa số nguyên tố cùng kĩ thuật khai triển thập phân sẽ giúp học sinh giải quyết gọn gàng mọi dạng bài từ cơ bản đến nâng cao.

A. TÓM TẮT PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH

1. Dấu hiệu chữ số tận cùng & số dư chia $3, 4, 5, 8$

Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên ($A = k^2, k \in \mathbb{N}$). Chữ số tận cùng của số chính phương chỉ có thể là $0, 1, 4, 5, 6, 9$ (không bao giờ tận cùng là $2, 3, 7, 8$). Khi chia cho 3 hoặc 4, số chính phương chỉ dư 0 hoặc 1; khi chia cho 5 chỉ dư $0, 1, 4$; số chính phương lẻ chia cho 8 luôn dư 1.

2. Phân tích thừa số nguyên tố (số mũ chẵn)

Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn. Hệ quả vàng: với số nguyên tố p, nếu số chính phương $A \vdots p$ thì $A \vdots p^2$ (chẳng hạn chia hết cho $2 \Rightarrow \vdots 4$, chia hết cho $3 \Rightarrow \vdots 9$, chia hết cho $5 \Rightarrow \vdots 25$). Nếu $A = a \cdot b$ là số chính phương và $\text{ƯCLN}(a, b) = 1$ thì cả a và b đều là số chính phương.

3. Phương pháp kẹp giữa hai số chính phương liên tiếp

Giữa hai số chính phương liên tiếp k^2 và $(k+1)^2$ ($k \in \mathbb{N}$) không tồn tại số chính phương nào. Nếu chứng minh được $k^2 < A < (k+1)^2$ thì kết luận ngay A không phải là số chính phương; nếu có $k^2 < A < (k+2)^2$ thì buộc $A = (k+1)^2$.

4. Khai triển cấu tạo số thập phân & chặn miền chữ số

Biểu diễn số tự nhiên theo các hàng: $\overline{ab} = 10a + b$, $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ (hoặc nhóm khối $\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd}$). Luôn khai thác điều kiện chữ số đầu khác 0 ($1 \le a \le 9$), các chữ số còn lại thuộc $\{0; 1; \ldots; 9\}$ và chặn miền bất đẳng thức để thu hẹp nhanh các trường hợp.

B. HỆ THỐNG BÀI TẬP TINH TUYỂN & LỜI GIẢI CHI TIẾT

TẦNG 1: CHỐT ĐIỂM 9 – 10 THI TRƯỜNG & KHẢO SÁT (2 BÀI)

Bài 101 Nhận diện số chính phương qua chữ số tận cùng • Tầng 1 • 9–10đ ★☆☆

Chứng minh rằng các số sau đều không phải là số chính phương:

a) $A = 10^{2025} + 10^{2024} + 8$;

b) $B = 2024^2 + 2023^2 + 2022^2 - 2021^2$;

c) $C = 100! + 7$ (trong đó $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 100$).

(Nguồn: Tổng hợp từ Đề HSG Toán 6 huyện Anh Sơn (Nghệ An) & Chuyên đề Số chính phương HSG Toán 6)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Nhắc lại tính chất: một số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng là $0, 1, 4, 5, 6, 9$, không thể tận cùng là $2, 3, 7, 8$.

a) Vì 10^{2025} và 10^{2024} đều có chữ số tận cùng là 0 nên tổng $A = 10^{2025} + 10^{2024} + 8$ có chữ số tận cùng là $0 + 0 + 8 = 8$. Do đó A không phải là số chính phương.

b) Xét chữ số tận cùng của từng số hạng:

- 2024^2 tận cùng là chữ số tận cùng của $4^2 = 16$, tức là 6;
- 2023^2 tận cùng là chữ số tận cùng của $3^2 = 9$, tức là 9;
- 2022^2 tận cùng là chữ số tận cùng của $2^2 = 4$, tức là 4;
- 2021^2 tận cùng là chữ số tận cùng của $1^2 = 1$, tức là 1.

Suy ra $B = 2024^2 + 2023^2 + 2022^2 - 2021^2$ có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của $6 + 9 + 4 - 1 = 18$, tức là 8. Vậy B không phải là số chính phương.

c) Trong tích $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 100$ có chứa thừa số 2 và thừa số 5 (hoặc thừa số 10) nên $100! \vdots 10$, suy ra $100!$ có chữ số tận cùng là 0. Do đó $C = 100! + 7$ có chữ số tận cùng là 7. Vậy C không phải là số chính phương.

NHẬN XÉT: Kiểm tra chữ số tận cùng luôn là bước phản xạ đầu tiên khi chứng minh một số không phải số chính phương. Lưu ý với mọi $n \geq 5$ thì $n!$ luôn tận cùng là 0, còn với phép trừ chữ số tận cùng cần cẩn thận lấy đủ hàng chục để tránh âm.

Bài 110 Tìm năm sinh và cấu tạo số qua dấu hiệu chia hết • Tầng 1 • 9–10đ ★☆☆

Rosalind Elsie Franklin ($\overline{abcd}$ – 1958) là nhà lí sinh học và tinh thể học tia X nổi tiếng với những đóng góp nền tảng về cấu trúc phân tử của DNA. Hãy tìm năm sinh $\overline{abcd}$ của bà, biết rằng:

- a là chữ số khác 0, không là số nguyên tố cũng không là hợp số;
- b là hợp số lớn nhất có một chữ số;
- $\overline{abcd}$ chia hết cho cả 2, 3 và 5, đồng thời $c < 5$.

(Nguồn: Đề kiểm tra Cuối HK1 Toán 6 Trường THCS Sương Nguyệt Anh – Quận 8 (TP.HCM) năm 2023–2024)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Xét từng điều kiện của các chữ số $a, b, c, d \in \{0; 1; \ldots; 9\}$, $a \neq 0$:

1) Vì $a \neq 0$ và a không là số nguyên tố cũng không là hợp số nên $a = 1$.

2) Các hợp số có một chữ số là $4, 6, 8, 9$; số lớn nhất trong đó là 9, nên $b = 9$.

3) Vì $\overline{abcd}$ chia hết cho cả 2 và 5 nên chữ số tận cùng phải bằng 0, tức $d = 0$.

4) Thay $a = 1, b = 9, d = 0$ ta được số $\overline{19c0}$. Vì $\overline{19c0} \vdots 3$ nên tổng các chữ số chia hết cho 3:

$$(1 + 9 + c + 0) \vdots 3 \Rightarrow (10 + c) \vdots 3.$$

Mà $c \in \mathbb{N}$ và $c < 5$ nên $c \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Thử lần lượt thấy chỉ có $c = 2$ thỏa mãn $10 + 2 = 12 \vdots 3$.

Vậy năm sinh của nhà khoa học Rosalind Elsie Franklin là 1920.

NHẬN XÉT: Dạng bài tìm năm sinh/mật mã tích hợp kiến thức thực tế rất phổ biến trong đề cuối HK1 Toán 6 các thành phố lớn. Hãy xử lí các chữ số bị chốt duy nhất trước (a, b, d), rồi mới dùng dấu hiệu chia hết cho 3 hoặc 9 cho chữ số còn lại (c).

TẦNG 2: VƯƠN TẦM HỌC SINH GIỎI QUẬN/HUYỆN & CLC (1 BÀI)

Bài 119 Tìm số tự nhiên để tổng giai thừa hoặc lũy thừa là số chính phương • Tầng 2 • HSG ★★★

a) Tìm tất cả các số tự nhiên $n \geq 1$ sao cho $S = 1! + 2! + 3! + \cdots + n!$ là một số chính phương.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là một số chính phương.

(Nguồn: Đề HSG Toán 6 huyện Nghi Sơn (Thanh Hóa) & Chuyên đề HSG Số chính phương)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

a) Thử trực tiếp với các giá trị nhỏ của n:

- $n = 1 \Rightarrow S = 1! = 1 = 1^2$ (thỏa mãn).
- $n = 2 \Rightarrow S = 1! + 2! = 3$ (không là số chính phương).
- $n = 3 \Rightarrow S = 1! + 2! + 3! = 1 + 2 + 6 = 9 = 3^2$ (thỏa mãn).
- $n = 4 \Rightarrow S = 1! + 2! + 3! + 4! = 9 + 24 = 33$ (không là số chính phương).
- Với mọi $n \geq 5$: mọi số hạng $k!$ ($k \geq 5$) đều chứa thừa số 2 và 5 nên chia hết cho 10, do đó có chữ số tận cùng bằng 0. Suy ra:

$$S = 33 + (5! + 6! + \cdots + n!)$$

có chữ số tận cùng bằng 3. Vì số chính phương không thể tận cùng bằng 3, nên S không là số chính phương với mọi $n \geq 5$.

Vậy $n \in \{1; 3\}$.

b) Ta có $2^8 + 2^{11} = 256 + 2048 = 2304 = 48^2$.

Đặt $48^2 + 2^n = a^2$ với $a \in \mathbb{N}^*$, $a > 48$. Khi đó:

$$a^2 - 48^2 = 2^n \Rightarrow (a - 48)(a + 48) = 2^n.$$

Vì tích của hai số nguyên dương $a - 48$ và $a + 48$ là một lũy thừa của 2 và $a + 48 > a - 48 > 0$, nên tồn tại các số tự nhiên x, y với $x > y \geq 0$, $x + y = n$ sao cho:

$$\begin{cases} a + 48 = 2^x \\ a - 48 = 2^y. \end{cases}$$

Trừ hai phương trình theo vế ta được:

$$2^x - 2^y = 96 \Rightarrow 2^y(2^{x-y} - 1) = 2^5 \cdot 3.$$

Vì $x > y$ nên $2^{x-y} - 1$ là số lẻ lớn hơn 0, còn 2^y là lũy thừa của 2. Do phân tích ra thừa số nguyên tố là duy nhất, ta buộc phải có:

$$\begin{cases} 2^y = 2^5 \\ 2^{x-y} - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ 2^{x-y} = 4 = 2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 7. \end{cases}$$

Suy ra $n = x + y = 7 + 5 = 12$.

Thử lại: $2^8 + 2^{11} + 2^{12} = 2304 + 4096 = 6400 = 80^2$ (thỏa mãn). Vậy $n = 12$.

NHẬN XÉT: Kĩ thuật đưa về hiệu hai bình phương $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 2^n$ rồi tách phần chẵn (2^y) và phần lẻ ($2^{x-y} - 1$) là phương pháp chuẩn mực cho mọi phương trình $k^2 + 2^n = a^2$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN TƯƠNG TỰ — ĐỔI SỐ & BIẾN THỂ (3 BÀI)

Bài tự luyện 4.1. (Tương tự Bài 101) Xét xem hai số $M = 11 + 11^2 + 11^3$ và $N = 2026^2 + 2025^2 + 2024^2 - 2023^2$ có phải là số chính phương không? Vì sao?

Bài tự luyện 4.2. (Tương tự Bài 110) Số nhà của hai bạn An và Bình đều là số tự nhiên có bốn chữ số dạng $\overline{a53b}$ và chia hết cho cả 5 và 9. Tìm số nhà của hai bạn biết số nhà của bạn An lớn hơn số nhà của bạn Bình.

Bài tự luyện 4.3. (Tương tự Bài 119) Tìm tất cả các số tự nhiên n để $n^2 + 2026$ là một số chính phương.

ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN VẮN TẮT — CHUYÊN ĐỀ 4

Bài	Đáp số / Kết luận	Hướng dẫn mấu chốt
Bài 4.1	**Cả M (tận cùng là 3) và N (tận cùng là 8) đều không phải là số chính phương.**	Tính chữ số tận cùng của M và N: lũy thừa của 11 luôn tận cùng là 1, còn với N xét chữ số tận cùng của từng bình phương rồi cộng trừ.
Bài 4.2	**Số nhà của An là 5535, số nhà của Bình là 1530.**	Chia hết cho 5 nên $b \in \{0; 5\}$; xét từng trường hợp của b rồi dùng điều kiện chia hết cho 9 (nhớ $a \neq 0$).
Bài 4.3	**Không tồn tại số tự nhiên n nào thỏa mãn (vì 2026 chẵn nhưng không chia hết cho 4).**	Đặt $a^2 - n^2 = (a-n)(a+n) = 2026$. Nhận xét rằng $a-n$ và $a+n$ luôn cùng tính chẵn lẻ nên tích của chúng hoặc lẻ, hoặc chia hết cho 4.

CHUYÊN ĐỀ 5 / 6 • TRÍCH ĐOẠN ĐỌC THỬ (3 BÀI MẪU + 3 TỰ LUYỆN)

CHUYÊN ĐỀ 5. ƯCLN – BCNN NÂNG CAO & TOÁN CHIA NHÓM, XẾP HÀNG CÓ DƯ

Các bài toán về ƯCLN và BCNN là phần ghi điểm quan trọng nhất trong mọi đề kiểm tra cuối học kì 1 cũng như đề thi Học sinh giỏi Toán 6 cấp Quận/Huyện. Không dừng lại ở dạng chia quà hay xếp hàng chia hết cơ bản, các đề phân loại 9–10 và HSG thường gài bẫy phép chia có dư, ngụy trang giữa "dư" và "thiếu", kết hợp nhiều điều kiện chia dư khác nhau và các phương trình đại số gắn với hệ thức vàng $a \cdot b = \text{ƯCLN}(a,b) \cdot \text{BCNN}(a,b)$. *Chuyên đề này hệ thống trọn vẹn 20 bài toán tinh hoa từ mức chốt điểm 9–10 đến đỉnh cao HSG, kèm 20 bài tự luyện có kiểm chứng chặt chẽ.*

A. TÓM TẮT PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH

1. Nhận diện bài toán thực tế: dùng ƯCLN hay BCNN?

- Dùng ƯCLN **(hoặc** ƯC**)** khi đề bài yêu cầu *chia đều* nhiều loại đồ vật/người vào các phần quà, túi, tổ, nhóm với số lượng nhóm **nhiều nhất** (hoặc thỏa mãn điều kiện chặn số nhóm). - Dùng BCNN **(hoặc** BC**)** khi đề bài yêu cầu *xếp hàng*, *bó sách*, *đóng hộp* theo nhiều cỡ khác nhau hoặc tìm *chu kì cùng gặp lại / cùng nhấp nháy / cùng trực nhật* sau thời gian **ít nhất**.

2. Kĩ thuật xử lý phép chia có dư (cùng dư – cùng thiếu – dư khác nhau)

- **Cùng số dư** r: nếu a chia cho m, n, p đều dư r thì $(a-r) \in \text{BC}(m,n,p)$ (và nhớ điều kiện số chia phải lớn hơn số dư r). - **Cùng số thiếu** k: nếu a chia cho m dư $m-k$, chia cho n dư $n-k$ thì $(a+k) \in \text{BC}(m,n)$. - **Chia đều đồ vật có dư**: chia A đồ vật cho x nhóm còn thừa r thì $(A-r) \vdots x$ với điều kiện bắt buộc $x > r$; thiếu k thì $(A+k) \vdots x$ với $x > k$. - **Dư khác nhau hoàn toàn**: dùng kĩ thuật *nhân hệ số* (tìm $2n \pm 1$), *ghép từng cặp* (Trung Hoa thu gọn) hoặc *cộng thêm hằng số* c *vượt số chia* để đưa về cùng chia hết.

3. Phương pháp đặt chuẩn hóa theo ƯCLN

Khi bài toán cho $\text{ƯCLN}(a,b) = d$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$), luôn đặt:

$$a = d \cdot m, \quad b = d \cdot n \quad \text{với } m, n \in \mathbb{N}^* \text{ và } \text{ƯCLN}(m,n) = 1$$

Khi đó mọi dữ kiện về tổng $a+b$, hiệu $a-b$, tích $a \cdot b$ hay $\text{BCNN}(a,b) = d \cdot m \cdot n$ đều rút gọn ngay về phương trình đơn giản theo m, n. **Cấm quên** bước lọc điều kiện $\text{ƯCLN}(m,n) = 1$ để loại nghiệm ngoại lai!

4. Hệ thức vàng và tính chất nền tảng của ƯCLN – BCNN

Với hai số tự nhiên khác 0 bất kì a, b, ta luôn có:

$$a \cdot b = \text{ƯCLN}(a,b) \cdot \text{BCNN}(a,b)$$

Và tính chất chia hết cực mạnh:

$$\text{BCNN}(a,b) \vdots \text{ƯCLN}(a,b)$$

Khi gặp hệ thức kết hợp tổng/hiệu với ƯCLN và BCNN (như $\text{ƯCLN}(a,b) + \text{BCNN}(a,b) = k$), ta đưa về dạng tích $d(mn+1) = k$ để chặn tập ước của d và giải triệt để.

B. HỆ THỐNG BÀI TẬP TINH TUYỂN & LỜI GIẢI CHI TIẾT

TẦNG 1: CHỐT ĐIỂM 9 – 10 THI TRƯỜNG & KHẢO SÁT (2 BÀI)

Bài 131 Chia đều phần quà dùng ƯCLN • Tầng 1 • 9–10đ ★☆☆

Hưởng ứng phong trào "Xuân yêu thương – Tết chia sẻ" giúp đỡ các bạn học sinh có hoàn cảnh khó khăn, Liên đội một trường THCS đã chuẩn bị 160 gói kẹo, 96 hộp sữa và 48 hộp bánh để chia đều vào các phần quà (số gói kẹo, số hộp sữa và số hộp bánh ở mỗi phần quà là như nhau). Hỏi có thể chia được nhiều nhất thành bao nhiêu phần quà? Khi đó, mỗi phần quà có bao nhiêu gói kẹo, bao nhiêu hộp sữa và bao nhiêu hộp bánh?

(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 6 năm học 2025 – 2026, trường THCS Ngọc Thụy – Hà Nội)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Gọi x là số phần quà nhiều nhất có thể chia được ($x \in \mathbb{N}^*$).

Vì 160 gói kẹo, 96 hộp sữa và 48 hộp bánh được chia đều vào x phần quà nên:

$$160 \vdots x, \quad 96 \vdots x, \quad 48 \vdots x$$

Mà x lớn nhất nên $x = \text{ƯCLN}(160, 96, 48)$.

Ta phân tích các số ra thừa số nguyên tố:

$$160 = 2^5 \cdot 5; \qquad 96 = 2^5 \cdot 3; \qquad 48 = 2^4 \cdot 3$$

Thừa số nguyên tố chung duy nhất là 2 với số mũ nhỏ nhất bằng 4, suy ra:

$$x = \text{ƯCLN}(160, 96, 48) = 2^4 = 16$$

Khi chia thành 16 phần quà, số lượng mỗi loại trong một phần quà là:

- Số gói kẹo: $160 : 16 = 10$ (gói).
- Số hộp sữa: $96 : 16 = 6$ (hộp).
- Số hộp bánh: $48 : 16 = 3$ (hộp).

Vậy có thể chia được nhiều nhất thành 16 phần quà; mỗi phần quà gồm 10 gói kẹo, 6 hộp sữa và 3 hộp bánh.

NHẬN XÉT: Cẩn thận bẫy nhầm nhanh! Thấy $96 \vdots 48$ nên nhiều bạn tưởng ngay $\text{ƯCLN}(160, 96, 48) = 48$, nhưng 160 không chia hết cho 48 (vì 48 chứa thừa số 3). Luôn phân tích đầy đủ cả ba số ra thừa số nguyên tố để không mất điểm oan!

Bài 137 Xếp hàng nguy trang cùng số dư (dư & thiếu) • Tầng 1 • 9–10đ ★★☆

Số học sinh của một trường học là một số có ba chữ số lớn hơn 800. Khi xếp hàng 20 thì dư 9 em, xếp hàng 30 thì thiếu 21 em và xếp hàng 35 thì thiếu 26 em. Hỏi trường đó có tất cả bao nhiêu học sinh?

(Nguồn: Đề KĐCL HSG Toán 6 năm học 2025 – 2026, trường THCS Hợp Thành – Thanh Hóa)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Gọi số học sinh của trường là x ($x \in \mathbb{N}^*$, $800 < x \leq 999$).

Ta quy đổi các điều kiện "thiếu" về số dư tương ứng:

- Xếp hàng 20 dư 9 em $\Longrightarrow$ x chia 20 dư 9 $\Longrightarrow$ $(x - 9) \vdots 20$.
- Xếp hàng 30 thiếu 21 em $\Longrightarrow$ x chia 30 dư $30 - 21 = 9$ $\Longrightarrow$ $(x - 9) \vdots 30$.

- Xếp hàng 35 thiếu 26 em $\Longrightarrow$ x chia 35 dư $35-26=9$ $\Longrightarrow$ $(x-9)\vdots 35$.

Như vậy $(x-9)\in \mathrm{BC}(20,30,35)$.

Phân tích các số ra thừa số nguyên tố:

$$20=2^2\cdot 5;\qquad 30=2\cdot 3\cdot 5;\qquad 35=5\cdot 7$$

Suy ra:

$$\mathrm{BCNN}(20,30,35)=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=420$$

Do đó $(x-9)\in \mathrm{B}(420)=\{0;420;840;1260;\dots\}$.

Vì $800<x\le 999$ nên $791<x-9\le 990$. Trong tập $\mathrm{B}(420)$, giá trị duy nhất thỏa mãn là:

$$x-9=840\Longrightarrow x=849$$

Vậy trường học đó có tất cả 849 học sinh.

NHẬN XÉT: Một pha "ngụy trang" cực kì tinh tế của người ra đề! Thoạt nhìn tưởng ba phép chia có dư khác nhau (dư 9, thiếu 21, thiếu 26), nhưng chỉ cần lấy *số chia trừ số thiếu*: $30-21=9$ và $35-26=9$ là lộ ngay **cùng số dư** 9!

TẦNG 2: VƯƠN TẦM HỌC SINH GIỎI QUẬN/HUYỆN & CLC (1 BÀI)

Bài 143 Chia dư khác nhau – kĩ thuật nhân hệ số • Tầng 2 • HSG ★★★

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất khác 0 sao cho khi chia n cho 5 dư 3, chia n cho 7 dư 4 và chia n cho 9 dư 5.

(Nguồn: Tuyển chọn đề thi HSG Toán 6 cấp Quận/Huyện)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Quan sát mối liên hệ giữa số chia và số dư ở cả ba phép chia:

- Chia 5 dư 3: nhận thấy $2\cdot 3-1=5$.
- Chia 7 dư 4: nhận thấy $2\cdot 4-1=7$.
- Chia 9 dư 5: nhận thấy $2\cdot 5-1=9$.

Từ phát hiện then chốt này, ta xét biểu thức $2n-1$:

- Vì $n=5q_1+3$ nên $2n-1=10q_1+5=5(2q_1+1)\vdots 5$.
- Vì $n=7q_2+4$ nên $2n-1=14q_2+7=7(2q_2+1)\vdots 7$.
- Vì $n=9q_3+5$ nên $2n-1=18q_3+9=9(2q_3+1)\vdots 9$.

Do đó $(2n-1)\in \mathrm{BC}(5,7,9)$.

Vì $5,7,9$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên:

$$\mathrm{BCNN}(5,7,9)=5\cdot 7\cdot 9=315$$

Suy ra $(2n-1)\in \mathrm{B}(315)=\{0;315;630;945;\dots\}$.

Vì $n\in\mathbb{N}^*$ nên $2n-1$ là số lẻ dương. Để n nhỏ nhất thì $2n-1$ phải là bội lẻ dương nhỏ nhất của 315, tức là:

$$2n-1=315\Longrightarrow 2n=316\Longrightarrow n=158$$

Kiểm tra lại: $158=5\cdot 31+3=7\cdot 22+4=9\cdot 17+5$ (đúng).

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là $n=158$.

NHẬN XÉT: Bí kíp HSG cực lợi hại! Khi số dư không giống nhau $(3, 4, 5)$ và số thiếu cũng không giống nhau $(2, 3, 4)$, hãy thử **nhân đôi** $2n$ (hoặc nhân $3n$) rồi so sánh $2r$ với số chia m. Nếu $2r - m$ là hằng số không đổi (ở đây cùng bằng 1) thì $2n - 1$ đồng thời chia hết cho mọi số chia!

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN TƯƠNG TỰ — ĐỔI SỐ & BIẾN THỂ (3 BÀI)

Bài tự luyện 5.1. (Tương tự Bài 131) Bạn Hùng có 84 quả bóng màu xanh, bạn Dũng có 72 quả bóng màu đỏ và bạn Mạnh có 120 quả bóng màu vàng. Ba bạn muốn chia đều số bóng của mình vào các túi sao cho mỗi túi đều có số bóng xanh, số bóng đỏ và số bóng vàng như nhau. Tìm số túi nhiều nhất có thể chia được và số bóng mỗi màu trong một túi khi đó.

Bài tự luyện 5.2. (Tương tự Bài 137) Một đội học sinh có số lượng trong khoảng từ 300 đến 500 em. Khi xếp hàng 12 thì dư 5 em, xếp hàng 15 thì thiếu 10 em và xếp hàng 18 thì thiếu 13 em. Tính số học sinh của đội đó.

Bài tự luyện 5.3. (Tương tự Bài 143) Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất khác 0 sao cho khi chia n cho 5 dư 2, chia cho 7 dư 3 và chia cho 11 dư 5.

ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN VẮN TẮT — CHUYÊN ĐỀ 5

Bài	Đáp số / Kết luận	Hướng dẫn mấu chốt
Bài 5.1	**Nhiều nhất 12 túi; mỗi túi có 7 bóng xanh, 6 bóng đỏ và 10 bóng vàng.**	Tìm $x = \text{ƯCLN}(84, 72, 120)$ rồi lấy từng số chia cho x.
Bài 5.2	365 **học sinh.**	Đổi "thiếu 10" khi chia 15 và "thiếu 13" khi chia 18 về cùng số dư 5, rồi tính $\text{BCNN}(12, 15, 18)$.
Bài 5.3	$n = 192$.	Xét $2n + 1$: kiểm tra $2 \cdot 2 + 1 = 5, 2 \cdot 3 + 1 = 7, 2 \cdot 5 + 1 = 11$, suy ra $(2n + 1) \in \text{BC}(5, 7, 11)$.

CHUYÊN ĐỀ 6 / 6 • TRÍCH ĐOẠN ĐỌC THỬ (3 BÀI MẪU + 3 TỰ LUYỆN)

CHUYÊN ĐỀ 6. PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN, TÌM n CHIA HẾT & CỰC TRỊ SỐ NGUYÊN

Chuyên đề 6 tổng hợp ba nhóm bài toán phân loại điểm 9–10 và đề thi Học sinh giỏi Toán 6 phổ biến nhất: tìm số nguyên, số tự nhiên n thỏa mãn quan hệ chia hết; giải phương trình nghiệm nguyên (phương trình Đi-ô-phăng) bằng phương pháp đưa về tích, tổng bình phương và lũy thừa; và tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất (cực trị) của biểu thức số nguyên, phân số. Nắm vững kỹ thuật tách phần nguyên, rút gọn bằng ước bằng tính chẵn lẻ – chia dư và nguyên tắc kiểm tra chặt điều kiện dấu "=" trong $\mathbb{Z}$ sẽ giúp học sinh bứt phá trọn vẹn câu cuối 0,5–2,0 điểm trong mọi đề thi HK1, CLC và HSG cấp Quận/Huyện.

A. TÓM TẮT PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH

1. Tìm n ∈ ℕ, ℤ để biểu thức chia hết (tách phần nguyên & khử biến)

Để tìm n sao cho $A(n) \vdots B(n)$ (hoặc phân số $\frac{A(n)}{B(n)} \in \mathbb{Z}$ với điều kiện mẫu $B(n) \neq 0$), ta tách phần chia hết cho $B(n)$ để khử biến n, đưa về dạng $k \vdots B(n)$ với $k \in \mathbb{Z}$ là hằng số khác 0, từ đó suy ra $B(n) \in \text{Ư}(k)$. Nếu hệ số bậc cao không chia hết ngay (dạng $(an+b) \vdots (cn+d)$ hay $(an^2+bn+c) \vdots (dn+e)$), ta nhân thêm hằng số m thích hợp vào tử rồi khử biến; đặc biệt lưu ý **bắt buộc thử lại** nếu $\text{ƯCLN}(m, B(n)) \neq 1$, và khi bậc tử bằng bậc mẫu với dư bậc nhất có thể dùng kỹ thuật chặn độ lớn $|R(n)| \geq |B(n)|$.

2. Phương trình nghiệm nguyên dạng tích (ax + b)(cy + d) = k

Với phương trình dạng $xy + ax + by = c$ hoặc $mxy + ax + by = c$, ta nhóm nhân tử chung (hoặc nhân hai vế với m trước khi nhóm) để đưa về dạng tích $(px+q)(ry+s) = k$ với $k \in \mathbb{Z}$. Khi lập bảng ước của k, hãy luôn kiểm tra trước **tính chẵn lẻ**, **số dư khi chia cho $3, 4, \ldots$** và **điều kiện dấu** (ví dụ $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow 2x+1 \geq 1$ và lẻ) để rút gọn phân nửa số trường hợp và tránh sai sót.

3. Phương trình tổng bình phương, giá trị tuyệt đối & lũy thừa trên ℕ

Dùng tính không âm $A^2 \geq 0$ và $|B| \geq 0$ để giải các phương trình dạng $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow A = B = 0$, hoặc $A^2 + |B| = k$ (tách k thành tổng một số chính phương và một số tự nhiên). Với phương trình hiệu hai bình phương $x^2 - y^2 = k$, ta viết $(x-y)(x+y) = k$ và khai thác việc $x-y$ cùng tính chẵn lẻ với $x+y$. Với phương trình lũy thừa trên $\mathbb{N}$ (như $2^x + 1 = 3^y$, $2^x + 624 = 5^y$), ta xét riêng các giá trị nhỏ $x = 0, 1$ rồi dùng tính chẵn lẻ, chia dư theo $3, 4, 5$ hoặc phân tích thừa số nguyên tố để chốt nghiệm.

4. Cực trị số nguyên (GTLN – GTNN) & nguyên tắc chặn dấu "="

Với biểu thức đa thức, sử dụng $A^2 \geq 0$, $|A| \geq 0$ và bất đẳng thức $|a| + |b| \geq |a+b|$; đặc biệt chú ý **bẫy số nguyên**: nếu A không thể bằng 0 trong $\mathbb{Z}$ (như $2x-5$ luôn lẻ) thì phải chặn $|2x-5| \geq 1$. Với phân số dạng $\frac{an+b}{cn+d}$, ta tách phần nguyên thành $q + \frac{r}{cn+d}$ rồi xét dấu tử r và dấu mẫu $cn+d$: muốn phân số dương lớn nhất thì mẫu nguyên dương nhỏ nhất; muốn trừ đi phân số nhỏ nhất (tức cộng phần dương lớn nhất) thì mẫu phải nguyên âm lớn nhất! Luôn chỉ rõ giá trị biến $n \in \mathbb{Z}$ (hoặc $\mathbb{N}$) để dấu "=" xảy ra.

B. HỆ THỐNG BÀI TẬP TINH TUYỂN & LỜI GIẢI CHI TIẾT

TẦNG 1: CHỐT ĐIỂM 9 – 10 THI TRƯỜNG & KHẢO SÁT (2 BÀI)

Bài 151 Tìm n tự nhiên chia hết bậc nhất • Tầng 1 • 9–10đ ★☆☆

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $(3n+14)$ chia hết cho $(n+2)$.

(Nguồn: Tuyển chọn đề HK1 & giao lưu HSG Toán 6 năm học 2024 – 2025)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ta tách phần nguyên của $3n+14$ theo bội của $n+2$ để khử biến n:

$$3n+14=3(n+2)+8.$$

Vì $3(n+2)\vdots(n+2)$ với mọi $n\in\mathbb{N}$, nên để $(3n+14)\vdots(n+2)$ thì $8\vdots(n+2)$, suy ra $n+2\in \text{Ư}(8)$.

Do $n\in\mathbb{N}$ nên $n+2\geq 2$, tức $n+2$ chỉ nhận các ước tự nhiên của 8 từ 2 trở lên:

$$n+2\in\{2;4;8\}.$$

- Nếu $n+2=2\Rightarrow n=0$ (thỏa mãn $n\in\mathbb{N}$).
- Nếu $n+2=4\Rightarrow n=2$ (thỏa mãn $n\in\mathbb{N}$).
- Nếu $n+2=8\Rightarrow n=6$ (thỏa mãn $n\in\mathbb{N}$).

Thử lại: $n=0$ có $14\vdots 2$; $n=2$ có $20\vdots 4$; $n=6$ có $32\vdots 8$ (đều đúng). Vậy $n\in\{0;2;6\}$.

NHẬN XÉT: Khi đề yêu cầu tìm số **tự nhiên** $n\in\mathbb{N}$, hãy chặn ngay điều kiện $n+2\geq 2$ để loại ngay ước 1 (tránh ra $n=-1$ không phải số tự nhiên!).

Bài 160 Tách nhóm phương trình xy + ax + by = c • Tầng 1 • 9–10đ ★★☆

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $xy+3x-2y=11$.

(Nguồn: Đề giao lưu HSNK Toán 6 xã Như Thanh (Thanh Hóa) 2025–2026)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Nhóm hai hạng tử đầu theo nhân tử chung x rồi thêm bớt hằng số ở hai vế để tạo nhân tử chung $(y+3)$:

$$xy+3x-2y=11$$
$$x(y+3)-2y-6=11-6$$
$$x(y+3)-2(y+3)=5$$
$$(x-2)(y+3)=5.$$

Vì $x,y\in\mathbb{Z}$ nên $x-2$ và $y+3$ là hai số nguyên có tích bằng 5.

Ta có 4 trường hợp phân tích 5 thành tích hai số nguyên:

- $x-2=1$ và $y+3=5\Rightarrow x=3;\ y=2$.
- $x-2=5$ và $y+3=1\Rightarrow x=7;\ y=-2$.
- $x-2=-1$ và $y+3=-5\Rightarrow x=1;\ y=-8$.
- $x-2=-5$ và $y+3=-1\Rightarrow x=-3;\ y=-4$.

Vậy có 4 cặp số nguyên thỏa mãn là $(x;y)\in\{(3;2),(7;-2),(1;-8),(-3;-4)\}$.

NHẬN XÉT: Công thức ghi nhớ nhanh: $xy+ax+by=c \Leftrightarrow (x+b)(y+a)=c+ab$. Ở đây $a=3, b=-2, c=11$ nên vế phải là $11+3\cdot(-2)=5$. Rất dễ tự kiểm tra lại dấu!

TẦNG 2: VƯƠN TẦM HỌC SINH GIỎI QUẬN/HUYỆN & CLC (1 BÀI)

Bài 169 Tìm n chia hết bậc hai có hệ số (nhân khử biến bảo toàn tập nghiệm) • Tầng 2 • HSG ★★★

Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $(3n^2+5n-4)\vdots(2n-1)$.

(Nguồn: Tuyển tập Đề thi HSG Toán 6 cấp Quận/Huyện)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Vì $n\in\mathbb{Z}$ nên $2n-1$ là số nguyên lẻ, do đó $2n-1\neq 0$ và $\text{ƯCLN}(4,2n-1)=1$.

Vì $\text{ƯCLN}(4,2n-1)=1$, ta có phép biến đổi tương đương:

$$(3n^2+5n-4)\vdots(2n-1)\Leftrightarrow 4(3n^2+5n-4)\vdots(2n-1).$$

Ta tách $4(3n^2+5n-4)$ theo nhân tử $(2n-1)$:

$$12n^2+20n-16=6n(2n-1)+26n-16=6n(2n-1)+13(2n-1)-3$$
$$=(6n+13)(2n-1)-3.$$

Vì $(6n+13)(2n-1)\vdots(2n-1)$ với mọi $n\in\mathbb{Z}$, nên:

$$4(3n^2+5n-4)\vdots(2n-1)\Leftrightarrow 3\vdots(2n-1)\Leftrightarrow 2n-1\in \text{Ư}(3)=\{-3;-1;1;3\}.$$

Giải lần lượt từng trường hợp:

- $2n-1=-3\Rightarrow n=-1$.
- $2n-1=-1\Rightarrow n=0$.
- $2n-1=1\Rightarrow n=1$.
- $2n-1=3\Rightarrow n=2$.

Kiểm tra nhanh vào đề bài: với $n\in\{-1;0;1;2\}$, biểu thức lần lượt nhận giá trị $-6,-4,4,18$ chia hết cho $-3,-1,1,3$.

Vậy $n\in\{-1;0;1;2\}$.

NHẬN XÉT: Tại sao nhân với 4 thay vì 2? Nhân 2 lần đầu mới khử được n^2, nhưng phần bậc nhất $13n$ lại có hệ số lẻ; nhân $2^2=4$ ngay từ đầu giúp khử trọn vẹn cả bậc hai lẫn bậc nhất! Và vì $\text{ƯCLN}(4,2n-1)=1$, phép nhân 4 bảo toàn tương đương 100%.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN TƯƠNG TỰ — ĐỔI SỐ & BIẾN THỂ (3 BÀI)

Bài tự luyện 6.1. (Tương tự Bài 151) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $(3n+11)\vdots(n+2)$.

Bài tự luyện 6.2. (Tương tự Bài 160) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ sao cho $xy-2x-y=1$.

Bài tự luyện 6.3. (Tương tự Bài 169) Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $(n^2+2n+5)\vdots(2n+1)$.

ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN VẮN TẮT — CHUYÊN ĐỀ 6

Bài	Đáp số / Kết luận	Hướng dẫn mấu chốt
Bài 6.1	$n = 3.$	Tách $3n + 11 = 3(n + 2) + 5$ và chú ý $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 2 \geq 2$.
Bài 6.2	$(x; y) \in \{(2; 5), (4; 3), (0; -1), (-2; 1)\}.$	Đưa về $(x - 1)(y - 2) = 3$ rồi lập bảng ước của $3.$
Bài 6.3	$n \in \{-9; -1; 0; 8\}.$	Vì $\text{ƯCLN}(4, 2n + 1) = 1$, nhân với 4: $4n^2 + 8n + 20 = (2n + 3)(2n + 1) + 17.$

HỌC CÙNG THẦY THẾ ANH & TỦ SÁCH TOÁN 6

🔒 ĐẶT NHẬN BẢN ĐẦY ĐỦ QUYỂN 1 (135 TRANG A4 • TRỌN BỘ 360 BÀI)

Bản đầy đủ gồm **180 bài tinh tuyển giải chi tiết** (106 bài Tầng 1 chốt 9–10 + 74 bài Tầng 2 HSG) + **180 bài tự luyện đối số** kèm Đáp số & Hướng dẫn, kiểm định toán học 100% bằng SymPy.

👉 Nhắn tin trực tiếp qua **Zalo 0986 683 218** với mã sách: **T6Q1** (hoặc quét mã QR bên dưới) để nhận ngay bản PDF chuẩn in ấn hoặc gói Word cho giáo viên!

📚 TRỌN BỘ 5 QUYỂN "CHINH PHỤC ĐIỂM 9–10 & HỌC SINH GIỎI TOÁN 6"

- **Quyển 1:** Số học nâng cao, Lũy thừa & Chia hết *(180 + 180 bài — Đã xuất bản)*.
- **Quyển 2:** Phân số nâng cao, Tổng dãy quy luật & Bất đẳng thức *(150 + 150 bài)*.
- **Quyển 3:** Hình học trực quan thực tế & Hình học phẳng nâng cao *(150 + 100 bài)*.
- **Quyển 4:** Toán thực tế VDC, Tổ hợp – Dirichlet – Logic & Xác suất *(120 + 80 bài)*.
- **Quyển 5:** 30 Đề thi Học sinh giỏi Toán 6 chọn lọc chuẩn GDPT 2018.

🎓 ĐĂNG KÍ HỌC THỬ MIỄN PHÍ CÙNG THẦY THẾ ANH

- Lớp Toán 6 Nền tảng – Bứt phá điểm 9–10 và Lớp Bồi dưỡng HSG / Chất lượng cao (Online Zoom & Offline Hà Nội).
- Chấm chữa tự luận 1–1, kho video bài giảng & phòng luyện đề tự động trên **vipstudy.vn** và **thaytheanh.com**.

BIÊN SOẠN & BẢN QUYỀN

Thầy Thế Anh (ThS. Nguyễn Thế Anh)

Điện thoại / Zalo: **0986 683 218**

Website: **thaytheanh.com** • **vipstudy.vn**

Quét mã QR để nhắn Zalo cho thầy, đăng kí học thử hoặc tham gia Nhóm học tập Toán THCS – hỏi đáp bài tập trong sách & nhận bộ đề HSG mới nhất.

Zalo Thầy Thế Anh
0986 683 218

Nhóm học tập Zalo
Quét để tham gia

© Bản quyền biên soạn thuộc về **Thầy Thế Anh (ThS. Nguyễn Thế Anh)** • thaytheanh.com • vipstudy.vn
Tài liệu đã qua kiểm định toán học tự động (SymPy 360/360 PASS). Vui lòng không sao chép hoặc phát hành thương mại khi chưa có sự đồng ý của tác giả.