TỦ SÁCH CHINH PHỤC ĐIỂM 9–10 & HỌC SINH GIỎI TOÁN 6

QUYỂN 2 / 5 • TRỌNG TÂM HỌC KÌ 2 & CÂU 0,5Đ ĐIỂM 10

PHÂN SỐ NÂNG CAO, DÃY QUY LUẬT & BẤT ĐẲNG THỨC

150 Bài Toán Tinh Tuyển (2 Tầng: 9–10 & HSG) + 150 Bài Tự Luyện Đổi Số

Tuyển chọn từ 168 đề thi HSG & đề GK2 – HK2 thật 2021 – 2027 • Kiểm định toán học 100%

BẢN ĐỌC THỬ MIỄN PHÍ • ĐỦ 5 CHUYÊN ĐỀ (15 BÀI MẪU + 15 BÀI TỰ LUYỆN)

CHÌA KHÓA LÀM CHỦ CÂU 0,5Đ – 1Đ KHÓ NHẤT HỌC KÌ 2 & HSG

- ✓ **Tổng cộng 300 bài toán Phân số & Bất đẳng thức chọn lọc:** gồm 150 bài mẫu giải chi tiết (88 bài Tầng 1 chốt 9–10 thi trường + 62 bài Tầng 2 HSG Quận/Huyện) và 150 bài tự luyện đổi số kèm Đáp số – Hướng dẫn.
- ✓ **Bao phủ 5 Chuyên đề kinh điển của HK2:** từ tính hợp lí – tìm x, tổng tích telescoping, bất đẳng thức làm trội – làm giảm – chia nhóm, phân số tối giản/nguyên cho đến cực trị phân số GTLN–GTNN.
- ✓ **Kiểm định toán học 100% bằng SymPy & Số hữu tỉ chính xác (300/300 PASS):** tuyệt đối không sai dấu, không sót nghiệm âm, không lỗi giả thiết rỗng.

Chuyên đề 1: Tính hợp lí biểu thức phức tạp & Tìm x nâng cao
Bài 1–30 (30 tinh tuyển + 30 tự luyện)

Chuyên đề 2: Tổng & Tích dãy phân số có quy luật
Bài 31–65 (35 tinh tuyển + 35 tự luyện)

Chuyên đề 3: So sánh phân số & Chứng minh Bất đẳng thức phân số
Bài 66–100 (35 tinh tuyển + 35 tự luyện)

Chuyên đề 4: Phân số tối giản, Phân số nguyên & PT phân số nghiệm nguyên
Bài 101–130 (30 tinh tuyển + 30 tự luyện)

Chuyên đề 5: Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất của biểu thức phân số
Bài 131–150 (20 tinh tuyển + 20 tự luyện)

BIÊN SOẠN & BẢN QUYỀN

Thầy Thế Anh (ThS. Nguyễn Thế Anh)

Điện thoại / Zalo: **0986 683 218**

Website: **thaytheanh.com** • **vipstudy.vn**

Quét mã QR để nhắn Zalo cho thầy, đăng kí học thử hoặc tham gia Nhóm học tập Toán THCS – hỏi đáp bài tập trong sách & nhận bộ đề HSG mới nhất.

Zalo Thầy Thế Anh
0986 683 218

Nhóm học tập Zalo
Quét để tham gia

LỜI NÓI ĐẦU & LỘ TRÌNH SỬ DỤNG SÁCH

Các em học sinh, quý phụ huynh và quý thầy cô thân mến,

Bước sang học kì 2 lớp 6 và mùa thi Học sinh giỏi cấp Quận/Huyện (tháng 1 – tháng 4 hằng năm), gần như **100% câu phân loại điểm 9,5 – 10** đều xoay quanh **Phân số nâng cao**: tổng dãy phân số quy luật khử liên tiếp, so sánh & bất đẳng thức phân số kẹp chặt, chứng minh phân số tối giản – tìm n để phân số nguyên, và tìm GTLN – GTNN của biểu thức phân số.

Quyển 2: Phân số nâng cao, Tổng dãy quy luật & Bất đẳng thức hệ thống hóa toàn bộ 5 mảng kiến thức then chốt này thành **300 bài toán (150 tinh tuyển + 150 tự luyện đối số)** tuyển chọn từ các đề thi thật giai đoạn 2021 – 2027. Mỗi chuyên đề được thiết kế đồng bộ 3 phần: **(A) 4 khung phương pháp giải nhanh → (B) Bài tập phân 2 tầng (Chốt 9–10 & HSG) kèm lời giải chi tiết + 💡 Nhận xét → (C) Bài tự luyện tương tự + Bảng Đáp số & Hướng dẫn**.

Chúc các em làm chủ mọi câu phân số chốt điểm 10 và bứt phá rực rỡ trong kì thi HSG!
Thầy Thế Anh

CHIẾN THUẬT TỰ HỌC 4 BƯỚC CHINH PHỤC PHÂN SỐ NÂNG CAO

Bước 1 • Thuộc dấu hiệu nhận dạng
Ghi nhớ 4 khung phương pháp đầu mỗi chuyên đề (khoảng cách thừa số ở mẫu, kẹp $\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$, chia nhóm, xét dấu mẫu số khi tìm GTLN/GTNN).

Bước 2 • Tự nháp Tầng 1
Giải chắc các bài **Tầng 1 (★☆☆ → ★★☆)** trước để nắm chắc 9–10 điểm thi giữa kì 2 và cuối kì 2 tại trường.

Bước 3 • Chinh phục Tầng 2 (HSG)
Rèn tư duy sâu với các bài **Tầng 2 (★★★)** và đọc kĩ hộp 💡 **Nhận xét** — nơi chỉ rõ những cạm bẫy kinh điển như mẫu âm, giả thiết $n \in \mathbb{N}$ vs $\mathbb{Z}$, chọn điểm giữ lại trong bất đẳng thức.

Bước 4 • Luyện phản xạ ở Phần C
Hoàn thành ngay **Bài tập tự luyện tương tự** cuối mỗi chuyên đề và đối chiếu *Bảng Đáp số & Hướng dẫn* để tự chấm mức độ thành thạo.

QUY ƯỚC PHÂN TẦNG & MỨC ĐỘ ★

Tầng / Mức độ	Kí hiệu	Mục tiêu năng lực & Đối tượng phù hợp
Tầng 1 • Nền tảng 9đ	★☆☆	Các câu vận dụng chuẩn 8,5 – 9,0 điểm: tách khử cơ bản, phần bù/phần hơn, tách phần nguyên tìm n.
Tầng 1 • Chốt 9,5–10đ	★★☆	Câu chốt điểm 10 cuối đề GK2/HK2 trường điểm: mẫu 3 thừa số, chia nhóm BĐT, cực trị mẫu dương/âm.
Tầng 2 • Học sinh giỏi	★★★	Đề thi HSG Quận/Huyện & CLC: tổng hỗn hợp $\sum k/a^k$, BĐT tích lẻ/chẵn, phương trình phân số Ai Cập, cực trị phân số khó.

MỤC LỤC CHI TIẾT

Lời nói đầu & Chiến thuật sử dụng sách 2

CHUYÊN ĐỀ 1. TÍNH HỢP LÍ BIỂU THỨC PHỨC TẠP & TÌM X NÂNG CAO (30 + 30 bài) 4

A. Tóm tắt phương pháp & B. Hệ thống bài tinh tuyển (Bài 1 – 30) 5

C. Bài tập tự luyện tương tự & Đáp số – Hướng dẫn (30 bài) 7

CHUYÊN ĐỀ 2. TỔNG & TÍCH DÃY PHÂN SỐ CÓ QUY LUẬT (35 + 35 bài) 8

A. Tóm tắt phương pháp & B. Hệ thống bài tinh tuyển (Bài 31 – 65) 9

C. Bài tập tự luyện tương tự & Đáp số – Hướng dẫn (35 bài) 11

CHUYÊN ĐỀ 3. SO SÁNH PHÂN SỐ & CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC PHÂN SỐ (35 + 35 bài) 12

A. Tóm tắt phương pháp & B. Hệ thống bài tinh tuyển (Bài 66 – 100) 13

C. Bài tập tự luyện tương tự & Đáp số – Hướng dẫn (35 bài) 15

CHUYÊN ĐỀ 4. PHÂN SỐ TỐI GIẢN, PHÂN SỐ NGUYÊN & PT PHÂN SỐ NGHIỆM NGUYÊN (30 + 30 bài) 17

A. Tóm tắt phương pháp & B. Hệ thống bài tinh tuyển (Bài 101 – 130) 18

C. Bài tập tự luyện tương tự & Đáp số – Hướng dẫn (30 bài) 21

CHUYÊN ĐỀ 5. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC PHÂN SỐ (20 + 20 bài) 22

A. Tóm tắt phương pháp & B. Hệ thống bài tinh tuyển (Bài 131 – 150) 23

C. Bài tập tự luyện tương tự & Đáp số – Hướng dẫn (20 bài) 25

Nhận bản đầy đủ & Học cùng Thầy Thế Anh 26

📌 **Về Bản Đọc Thử Miễn Phí:** Bản đầy đủ gồm **133 trang A4 (150 bài tinh tuyển + 150 bài tự luyện = 300 bài)**. Bản đọc thử gửi tặng **trọn bộ 5 bảng Phương pháp giải** cùng **15 bài mẫu giải chi tiết (3 bài/chuyên đề đủ Tầng 1 & Tầng 2) + 15 bài tự luyện kèm đáp số**.

CHUYÊN ĐỀ 1 / 5 • TRÍCH ĐOẠN ĐỌC THỬ (3 BÀI MẪU + 3 TỰ LUYỆN)

CHUYÊN ĐỀ 1. TÍNH HỢP LÍ BIỂU THỨC PHỨC TẠP & TÌM x NÂNG CAO TRÊN $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Các bài toán tính hợp lí biểu thức phức tạp và tìm x nâng cao trên các tập hợp số $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ luôn là phần mở đầu mang tính phân loại cao trong đề kiểm tra giữa kì II, cuối kì II chốt điểm 9–10 và đề thi Học sinh giỏi Toán 6 cấp Trường, Quận/Huyện. Chuyên đề này hệ thống hóa trọn vẹn các kĩ thuật tinh túy nhất: nhóm phân số, đặt nhân tử chung, rút gọn phân số tầng lớn và tỉ số $\frac{A}{B}$, kĩ thuật cộng thêm 1 tạo tử chung, giải liên phân số, giá trị tuyệt đối và kết hợp tổng dãy quy luật. Mỗi bài toán đều có phân tích bản chất, lời giải chuẩn mực từng bước, lưu ý bẫy sai thường gặp và một bài tập tương tự có đáp số kiểm chứng.

A. TÓM TẮT PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH

1. Đặt nhân tử chung, nhóm phân số cùng mẫu/tử & rút gọn tỉ số biểu thức $\frac{A}{B}$

- **Tính chất phân phối & nhóm hợp lí:** Với các tổng/hiệu phân số, hỗn số, số thập phân, luôn ưu tiên đưa về cùng dạng, bỏ ngoặc theo quy tắc dấu rồi nhóm các phân số cùng mẫu hoặc các số thập phân có tổng tròn chục. Áp dụng linh hoạt $a \cdot b + a \cdot c = a(b + c)$ và rút gọn phân số lặp chu kì ($\frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}} = \frac{\overline{ab} \cdot 101}{\overline{cd} \cdot 101} = \frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$). - **Rút gọn phân số tầng lớn & tỉ số $\frac{A}{B}$:** Phân tích các lũy thừa về cơ số nguyên tố ($2, 3, 5, 7, \ldots$) rồi đặt lũy thừa có số mũ nhỏ nhất làm nhân tử chung. Với tỉ số $\frac{A}{B}$ gồm nhiều phân số, tìm hằng số k sao cho tử số tách thành k lần mẫu số (hoặc nhân hai vế với bước nhảy mẫu để xuất hiện cụm giống hệt nhau rồi triệt tiêu).

2. Tách phần nguyên, cộng thêm 1 vào mỗi phân số để tạo tử chung $\frac{x+a}{b} + 1 = \frac{x+a+b}{b}$

- **Dấu hiệu nhận diện:** Phương trình chứa tổng các phân số dạng $\frac{x+a_i}{b_i}$ mà tổng $a_i + b_i = C$ không đổi (hoặc hiệu $a_i - b_i = C$ không đổi, hoặc dạng tổng quát $a_i + k_i b_i = C$). - **Quy trình 3 bước chuẩn mực:** (1) Cộng thêm 1 (hoặc trừ 1, hoặc tách hằng số vế phải thành $k_1 + k_2 + \ldots$) vào từng phân số để mọi phân số có chung tử thức $x + C$; (2) Chuyển hết sang một vế rồi đặt $(x + C)$ làm nhân tử chung: $(x + C) \cdot M = 0$; (3) **Bắt buộc chỉ rõ** $M \neq 0$ (thường do mọi số hạng của M cùng dương hoặc ghép từng cặp dương/âm) rồi mới suy ra $x + C = 0 \implies x = -C$.

3. Giải phương trình chứa dấu ngoặc nhiều tầng, hỗn số – số thập phân – phần trăm & lũy thừa phân số

- **Phá ngoặc từ ngoài vào trong khi tìm x:** Khác với tính giá trị biểu thức (làm từ trong ra ngoài), khi tìm x nằm sâu trong nhiều lớp ngoặc $\{[\ldots]\}$, ta bóc dần từng phép tính bên ngoài bằng phép toán ngược (cộng $\leftrightarrow$ trừ, nhân $\leftrightarrow$ chia) và đổi hỗn số, phần trăm ($a\% = \frac{a}{100}$), số thập phân về phân số tối giản. - **Lũy thừa phân số & bẫy nghiệm:** Với $A^{2k} = B^{2k}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) phải xét **hai trường hợp** $A = B$ hoặc $A = -B$; còn mũ lẻ $A^{2k+1} = B^{2k+1}$ chỉ có một trường hợp $A = B$. Với dạng $A^m = A^n$ ($m > n \geq 1$), luôn chuyển về đặt nhân tử chung $A^n(A^{m-n} - 1) = 0$ để không bỏ sót nghiệm $A = 0, A = 1$ và $A = -1$ (nếu $m - n$ chẵn).

4. Tìm x chứa tổng dãy phân số quy luật, giá trị tuyệt đối hoặc tích bằng 0

- **Kết hợp tổng dãy quy luật & liên phân số:** Khi phương trình chứa tổng dãy phân số dạng $\frac{k}{n(n+k)}$, tổng đối xứng, tổng cấp số cộng hoặc liên phân số nhiều tầng, trước hết rút gọn hoàn toàn phần dãy số (dùng tách hiệu $\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$ hoặc tách phần nguyên ngược từ ngoài vào trong) rồi giải tìm x. - **Giá trị tuyệt đối, tích bằng 0 & tổng không âm:** Với $|A| = m$ ($m > 0$) $\implies A = m$ hoặc $A = -m$; với $|A| + |B| = C$, chia khoảng theo các mốc làm $A = 0, B = 0$ để phá dấu giá trị tuyệt đối. Với $A \cdot B = 0 \implies A = 0$ hoặc $B = 0$; còn với $A^2 + |B| = 0$ (tổng các số không âm bằng 0) thì bắt buộc **đồng thời** $A = 0$ và $B = 0$.

B. HỆ THỐNG BÀI TẬP TINH TUYỂN & LỜI GIẢI CHI TIẾT

TẦNG 1: CHỐT ĐIỂM 9 – 10 THI TRƯỜNG & KHẢO SÁT (2 BÀI)

Bài 1 Nhóm phân số cùng mẫu & đặt nhân tử chung • Tầng 1 • 9–10đ ★☆☆

Thực hiện phép tính (tính hợp lí nếu có thể):

a) $A = \dfrac{-5}{13} + \dfrac{-2}{5} + \dfrac{-8}{13} + \dfrac{3}{5}$;

b) $B = \dfrac{-5}{7} \cdot \dfrac{2}{11} + \dfrac{-5}{7} \cdot \dfrac{9}{11} + \dfrac{5}{7}$.

(Nguồn: Đề kiểm tra cuối học kì II Toán 6 năm 2023–2024, Phòng GD&ĐT Kinh Môn (Hải Dương))

LỜI GIẢI CHI TIẾT

a) Áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng phân số, ta nhóm các phân số có cùng mẫu số:

$$A = \left(\frac{-5}{13} + \frac{-8}{13}\right) + \left(\frac{-2}{5} + \frac{3}{5}\right) = \frac{-13}{13} + \frac{1}{5} = -1 + \frac{1}{5} = \frac{-5+1}{5} = -\frac{4}{5}$$

b) Nhận thấy hai tích đầu có chung thừa số $\dfrac{-5}{7}$, ta áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng:

$$B = \frac{-5}{7} \cdot \left(\frac{2}{11} + \frac{9}{11}\right) + \frac{5}{7} = \frac{-5}{7} \cdot \frac{11}{11} + \frac{5}{7} = \frac{-5}{7} \cdot 1 + \frac{5}{7} = -\frac{5}{7} + \frac{5}{7} = 0$$

Vậy $A = -\dfrac{4}{5}$ và $B = 0$.

NHẬN XÉT: Trong câu b, nhiều học sinh quy đồng cả hai tích rồi mới cộng dẫn đến mẫu lớn 77 rất dễ sai dấu. Luôn quan sát thừa số chung trước tiên; chú ý rằng $\dfrac{-5}{7} = -\dfrac{5}{7}$ là số đối của $\dfrac{5}{7}$ nên tổng của chúng bằng 0.

Bài 10 Tìm x chứa dấu ngoặc nhiều tầng & phép chia phân số • Tầng 1 • 9–10đ ★☆☆

Tìm x, biết:

a) $720 : [41 - (17x - 11)] = 2^3 \cdot 5$;

b) $\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4} : \left(x - \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{5}{4}$.

(Nguồn: Đề giao lưu HSG Toán 6 năm 2025–2026, Xã Quảng Bình (Thanh Hóa) & Phòng GD&ĐT Chí Linh (Hải Dương))

LỜI GIẢI CHI TIẾT

a) Rút gọn vế phải $2^3 \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 40$, rồi bóc dần các lớp ngoặc từ ngoài vào trong:

$$720 : [41 - (17x - 11)] = 40$$
$$41 - (17x - 11) = 720 : 40 = 18$$
$$17x - 11 = 41 - 18 = 23$$
$$17x = 23 + 11 = 34 \implies x = 34 : 17 = 2$$

b) Chú ý thứ tự ưu tiên phép chia trước phép trừ, ta coi $\dfrac{1}{4} : \left(x - \dfrac{2}{3}\right)$ là số trừ cần tìm (điều kiện $x \neq \dfrac{2}{3}$):

$$\frac{1}{4} : \left(x - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}:\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\cdot(-2)=-\frac{1}{2}$$
$$x=-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{-3+4}{6}=\frac{1}{6}\quad(\text{thỏa mãn } x\neq\frac{2}{3})$$

Vậy a) $x=2$; b) $x=\frac{1}{6}$.

NHẬN XÉT: Bẫy kinh điển ở câu b là thực hiện phép trừ $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ trước phép chia — đây là lỗi sai thứ tự thực hiện phép tính nghiêm trọng! Luôn giữ nguyên khối phép chia $\frac{1}{4}:\left(x-\frac{2}{3}\right)$ cho đến bước tách số trừ.

TẦNG 2: VƯƠN TẦM HỌC SINH GIỎI QUẬN/HUYỆN & CLC (1 BÀI)

Bài 19 Rút gọn biểu thức phân số lũy thừa cơ số âm & phân số lặp • Tầng 2 • HSG ★★★

Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A=\dfrac{2^{19}\cdot 27^3-15\cdot(-4)^9\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10}+(-12)^{10}}-\dfrac{171717}{343434}$;

b) $B=\dfrac{5\cdot 4^6\cdot 9^4-3^9\cdot(-8)^4}{4\cdot 2^{13}\cdot 3^8+2\cdot 8^4\cdot(-27)^3}$.

(Nguồn: Đề giao lưu HSG Toán 6 năm 2025–2026, Xã Điền Lư (Thanh Hóa) & Trường THCS Nghĩa Đồng (Nghệ An))

LỜI GIẢI CHI TIẾT

a) Xử lí dấu của các lũy thừa cơ số âm và phân tích ra thừa số nguyên tố $2,3$:

- Vì $(-4)^9=-(2^2)^9=-2^{18}$ nên $-15\cdot(-4)^9\cdot 9^4=+15\cdot 2^{18}\cdot 3^8=5\cdot 2^{18}\cdot 3^9$.
- Vì $(-12)^{10}=12^{10}=(2^2\cdot 3)^{10}=2^{20}\cdot 3^{10}$ và $6^9\cdot 2^{10}=2^9\cdot 3^9\cdot 2^{10}=2^{19}\cdot 3^9$.
- Ngoài ra $\dfrac{171717}{343434}=\dfrac{17\cdot 10101}{34\cdot 10101}=\dfrac{17}{34}=\dfrac{1}{2}$.

Thay vào biểu thức A:

$$A=\frac{2^{19}\cdot 3^9+5\cdot 2^{18}\cdot 3^9}{2^{19}\cdot 3^9+2^{20}\cdot 3^{10}}-\frac{1}{2}=\frac{2^{18}\cdot 3^9\cdot(2+5)}{2^{19}\cdot 3^9\cdot(1+2\cdot 3)}-\frac{1}{2}=\frac{7}{2\cdot 7}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

b) Tương tự, chú ý $(-8)^4=8^4=2^{12}$ (mũ chẵn) và $(-27)^3=-27^3=-3^9$ (mũ lẻ):

$$B=\frac{5\cdot(2^2)^6\cdot(3^2)^4-3^9\cdot 2^{12}}{2^2\cdot 2^{13}\cdot 3^8-2\cdot(2^3)^4\cdot 3^9}=\frac{5\cdot 2^{12}\cdot 3^8-2^{12}\cdot 3^9}{2^{15}\cdot 3^8-2^{13}\cdot 3^9}$$

Đặt nhân tử chung $2^{12}\cdot 3^8$ ở tử và $2^{13}\cdot 3^8$ ở mẫu:

$$B=\frac{2^{12}\cdot 3^8\cdot(5-3)}{2^{13}\cdot 3^8\cdot(2^2-3)}=\frac{2^{12}\cdot 3^8\cdot 2}{2^{13}\cdot 3^8\cdot 1}=\frac{2^{13}\cdot 3^8}{2^{13}\cdot 3^8}=1$$

Vậy $A=0$ và $B=1$.

NHẬN XÉT: Trong các bài rút gọn lũy thừa HSG có cơ số âm, bước **bắt buộc làm đầu tiên** là xử lí dấu của từng lũy thừa âm theo quy tắc chẵn/lẻ: $(-a)^{2k}=a^{2k}$ và $(-a)^{2k+1}=-a^{2k+1}$. Làm gọn dấu ngay từ dòng đầu tiên giúp loại bỏ hoàn toàn nguy cơ sai dấu khi đặt nhân tử chung.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN TƯƠNG TỰ — ĐỔI SỐ & BIẾN THỂ (3 BÀI)

Bài tự luyện 1.1. (Tương tự Bài 1) Tính hợp lí biểu thức $M = \dfrac{-7}{15}\cdot\dfrac{4}{13} + \dfrac{-7}{15}\cdot\dfrac{9}{13} + \dfrac{22}{15}$.

Bài tự luyện 1.2. (Tương tự Bài 10) Tìm x, biết: a) $360 : [29 - (3x - 4)] = 2^3\cdot 3$; b) $\dfrac{5}{6} - \dfrac{2}{3} : \left(x + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Bài tự luyện 1.3. (Tương tự Bài 19) Tính giá trị biểu thức $C = \dfrac{2^{12}\cdot 3^5 - 4^6\cdot 9^2}{(2^2\cdot 3)^6 + 8^4\cdot 3^5} - \dfrac{5^{10}\cdot 7^3 - 25^5\cdot 49^2}{(125\cdot 7)^3 + 5^9\cdot 14^3}$.

ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN VẮN TẮT — CHUYÊN ĐỀ 1

Bài	Đáp số / Kết luận	Hướng dẫn mấu chốt
Bài 1.1	$M = 1$.	Đặt $\dfrac{-7}{15}$ làm thừa số chung ở hai tích đầu để xuất hiện $\dfrac{4}{13} + \dfrac{9}{13} = 1$, sau đó cộng với $\dfrac{22}{15}$.
Bài 1.2	a) $x = 6$; b) $x = \dfrac{3}{2}$.	a) Tính $2^3\cdot 3 = 24$ rồi tìm lần lượt $29 - (3x - 4) = 15$; b) Coi $\dfrac{2}{3} : \left(x + \dfrac{1}{2}\right)$ là số trừ bằng $\dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.
Bài 1.3	$C = \dfrac{7}{2}$.	Rút gọn riêng từng phân số bằng cách đưa về thừa số nguyên tố $2, 3$ (phân số đầu ra $\dfrac{1}{6}$) và $5, 7, 2$ (phân số sau ra $-\dfrac{10}{3}$).

CHUYÊN ĐỀ 2 / 5 • TRÍCH ĐOẠN ĐỌC THỬ (3 BÀI MẪU + 3 TỰ LUYỆN)

CHUYÊN ĐỀ 2. TỔNG & TÍCH DÃY PHÂN SỐ CÓ QUY LUẬT

Tổng và tích các dãy phân số có quy luật là mảng kiến thức "ăn điểm" đặc trưng nhất ở câu chốt điểm 9–10 trong đề kiểm tra giữa kì II, học kì II cũng như các đề thi học sinh giỏi Toán 6 cấp Quận/Huyện và trường chất lượng cao. Thay vì quy đồng mẫu số cồng kềnh, học sinh cần nắm vững nghệ thuật tách khử liên tiếp (telescoping), triệt tiêu chéo ở tích dãy phân số, tính tổng lũy thừa cấp số nhân – hỗn hợp và kĩ thuật biến đổi tỉ số hai tổng $\frac{A}{B}$. Chuyên đề này hệ thống hóa 35 bài toán cốt lõi kèm 35 bài tự luyện tương đương, đưa học sinh từ những mẫu hình nền tảng đến các bài toán Olympic THCS sắc bén.

A. TÓM TẮT PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH

1. Kĩ thuật tách khử liên tiếp mẫu 2 thừa số (telescoping)

Với mẫu số là tích hai thừa số cách nhau k đơn vị, ta dùng hằng đẳng thức lõi: $\frac{k}{a(a+k)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+k}$ ($a \neq 0, a+k \neq 0$). Nếu tử số chưa bằng hiệu hai thừa số ở mẫu, hãy nhân và chia cùng một hằng số thích hợp hoặc rút nhân tử chung ở mẫu trước khi tách. Với dãy có khoảng cách không đều (mắt xích nối tiếp $a_1a_2, a_2a_3, \ldots$), kiểm tra tỉ số giữa tử số và hiệu $a_{i+1} - a_i$; với dãy đan dấu dạng $\frac{2k+1}{k(k+1)}$, hãy tách thành tổng $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$ để khử lẫn nhau.

2. Tách khử mẫu 3 thừa số & tích dãy phân số triệt tiêu chéo

Với mẫu 3 thừa số liên tiếp hoặc cách đều d, ta dùng: $\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ và tổng quát $\frac{2d}{a(a+d)(a+2d)} = \frac{1}{a(a+d)} - \frac{1}{(a+d)(a+2d)}$. Với tích dãy phân số, hãy quy đồng từng thừa số rồi phân tích tử và mẫu thành tích các nhân tử liên tiếp (như $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$, $1 + \frac{1}{k(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$), sau đó gom các dãy nhân tử cùng loại để triệt tiêu chéo; đừng quên đếm số thừa số âm nếu có dấu trừ.

3. Tổng lũy thừa phân số cấp số nhân & tổng hỗn hợp $\sum \frac{k}{a^k}$

Với tổng lũy thừa phân số cùng cơ số $S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n}$ ($a \in \mathbb{N}, a \geq 2$), ta nhân hai vế với a rồi lấy $aS - S = (a-1)S$ để khử toàn bộ các số hạng ở giữa. Nếu tổng đan dấu ($+, -, +, -, \ldots$), ta nhân với a rồi lấy tổng $aS + S = (a+1)S$. Với tổng hỗn hợp có tử tăng đều dạng $A = \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \cdots + \frac{n}{a^n}$, nhân hai vế với a rồi trừ (hoặc cộng nếu đan dấu) sẽ đưa bài toán về đúng tổng cấp số nhân cơ bản ở trên.

4. Kĩ thuật tính tỉ số hai tổng $\frac{A}{B}$

Khi hai tổng A và B quá dài và không tính gọn trực tiếp được (như tổng nghịch đảo $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$), ta không cố tính riêng từng tổng mà biến đổi A xuất hiện đúng nhân tử chung B (hoặc biến đổi cả A và B về cùng một tổng trung gian S). Ba chiêu thức chủ lực gồm: (i) tách số nguyên m thành tổng m số 1 rồi ghép vào từng phân số; (ii) nhân tổng mẫu tích đối xứng $a(S-a)$ với S để tách thành tổng nghịch đảo $\frac{1}{a} + \frac{1}{S-a}$; (iii) đảo chiều hoặc đổi cách đếm số lần xuất hiện của mỗi số hạng.

B. HỆ THỐNG BÀI TẬP TINH TUYỂN & LỜI GIẢI CHI TIẾT

TẦNG 1: CHỐT ĐIỂM 9 – 10 THI TRƯỜNG & KHẢO SÁT (2 BÀI)

Bài 31 Tổng khử liên tiếp mẫu 2 thừa số liên tiếp • Tầng 1 • 9–10đ ★☆☆

Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{99\cdot 100}$;

b) $B = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{48\cdot 49} + \dfrac{1}{49\cdot 50}$.

(Nguồn: Đề kiểm định chất lượng HSG Toán 6 năm học 2025 – 2026, trường THCS Hợp Thành – Thanh Hóa)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Áp dụng công thức tách khử liên tiếp: với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

a) Tính A:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$$

Các phân số đối nhau ở giữa triệt tiêu hết từng cặp, chỉ còn lại số hạng đầu và số hạng cuối:

$$A = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

b) Tính B:

Nhận thấy số hạng đầu $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1\cdot 2}$ (hoặc giữ nguyên $\dfrac{1}{2}$ và tách từ $\dfrac{1}{2\cdot 3}$ trở đi):

$$B = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{49}\right) + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{50}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{49} + \frac{1}{49}\right) - \frac{1}{50} = 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$$

Vậy $A = \dfrac{99}{100}$ và $B = \dfrac{49}{50}$.

NHẬN XÉT: Trong câu b), rất nhiều bạn vội tách $\dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{2}$ rồi nhầm dấu khi cộng với $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$: hãy nhớ $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$, khớp hoàn toàn với $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$!

Bài 41 Tổng chứa số tam giác $1 + 2 + \cdots + k$ • Tầng 1 • 9–10đ ★★☆

Tính giá trị của biểu thức:

$$B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \cdots + \frac{1}{200}(1+2+\cdots+200)$$

(Nguồn: Đề thi chọn HSG Toán 6 năm học 2025 – 2026, phường Nam Sầm Sơn – Thanh Hóa)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Nhắc lại công thức tổng k số tự nhiên dương liên tiếp đầu tiên:

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Suy ra với mỗi $k\in\{1;2;3;\ldots;200\}$, số hạng thứ k của B được rút gọn thành:

$$\frac{1}{k}(1+2+\cdots+k)=\frac{1}{k}\cdot\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k+1}{2}$$

Thay vào biểu thức B (lưu ý số hạng đầu $1=\frac{2}{2}$):

$$B=\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}+\cdots+\frac{201}{2}=\frac{2+3+4+\cdots+201}{2}$$

Tổng $2+3+4+\cdots+201$ có $(201-2):1+1=200$ số hạng, nên:

$$2+3+4+\cdots+201=\frac{(2+201)\cdot 200}{2}=203\cdot 100=20300$$

Do đó:

$$B=\frac{20300}{2}=10150$$

Vậy $B=10150$.

NHẬN XÉT: Công thức $1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ là \"chìa khóa đa năng\": nếu $1+2+\cdots+k$ nằm trên tử thì chia cho k ra cấp số cộng; nếu nằm dưới mẫu thì lật ngược thành $\frac{2}{k(k+1)}$ để khử liên tiếp!

TẦNG 2: VƯƠN TẦM HỌC SINH GIỎI QUẬN/HUYỆN & CLC (1 BÀI)

Bài 51 Tổng telescoping mắt xích không đều & tìm x • Tầng 2 • HSG ★★★

Tìm số tự nhiên x, biết:

$$\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{8}{5\cdot 9}+\frac{12}{9\cdot 15}+\cdots+\frac{32}{x(x+16)}=\frac{16}{25}$$

(Nguồn: Đề HSG Toán 6 huyện Triệu Sơn (2023 – 2024) & trường THCS TT Bến Sung – Thanh Hóa (2025 – 2026))

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Điều kiện $x\in\mathbb{N}^*$. Quan sát hiệu hai thừa số ở mỗi mẫu số và tử số tương ứng:

- Phân số thứ nhất: mẫu $3\cdot 5$ có hiệu $5-3=2$, tử là $4=2\cdot 2$;
- Phân số thứ hai: mẫu $5\cdot 9$ có hiệu $9-5=4$, tử là $8=2\cdot 4$;
- Phân số thứ ba: mẫu $9\cdot 15$ có hiệu $15-9=6$, tử là $12=2\cdot 6$;
- $\ldots$
- Phân số cuối cùng: mẫu $x(x+16)$ có hiệu $(x+16)-x=16$, tử là $32=2\cdot 16$.

Như vậy, mỗi tử số luôn gấp đúng 2 lần hiệu hai thừa số ở mẫu, đồng thời các mẫu số nối mắt xích liên tiếp ($3\to 5\to 9\to 15\to 23\to 33\to 45\to 59\to 75$). Đặt 2 làm nhân tử chung ở vế trái:

$$2\left(\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{6}{9\cdot 15}+\cdots+\frac{16}{x(x+16)}\right)=\frac{16}{25}$$

Chia hai vế cho 2 rồi tách khử liên tiếp:

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{15}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+16}\right)=\frac{8}{25}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{x+16}=\frac{8}{25}$$
$$\frac{1}{x+16}=\frac{1}{3}-\frac{8}{25}=\frac{25-24}{75}=\frac{1}{75}$$

Suy ra $x+16=75 \Longrightarrow x=59$ (thỏa mãn $x\in\mathbb{N}^*$ và khớp đúng số hạng thứ 8 của dãy mẫu $3,5,9,15,23,33,45,59,75$).

Vậy $x=59$.

NHẬN XÉT: Với bài toán telescoping mắt xích không đều, đừng hoảng khi thấy khoảng cách ở mẫu tăng dần ($2,4,6,\ldots,16$)! Chỉ cần tử số tăng tỉ lệ thuận với khoảng cách đó theo cùng một hệ số c (ở đây $c=2$), dãy vẫn khử sạch như thường.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN TƯƠNG TỰ — ĐỔI SỐ & BIẾN THỂ (3 BÀI)

Bài tự luyện 2.1. (Tương tự Bài 31) Tính giá trị các biểu thức $C=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{2025\cdot 2026}$ và $D=\dfrac{1}{10\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 12}+\cdots+\dfrac{1}{99\cdot 100}$.

Bài tự luyện 2.2. (Tương tự Bài 41) Tính $S=\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\dfrac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+50}$.

Bài tự luyện 2.3. (Tương tự Bài 51) Tìm số tự nhiên x biết $\dfrac{3}{1\cdot 2}+\dfrac{6}{2\cdot 4}+\dfrac{9}{4\cdot 7}+\cdots+\dfrac{30}{x(x+10)}=\dfrac{165}{56}$.

ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN VẮN TẮT — CHUYÊN ĐỀ 2

Bài	Đáp số / Kết luận	Hướng dẫn mấu chốt
Bài 2.1	$C=\dfrac{2025}{2026}$; $D=\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{100}=\dfrac{9}{100}$.	Dùng $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ cho từng số hạng, lưu ý điểm bắt đầu của D là $\dfrac{1}{10}$.
Bài 2.2	$S=2\left(\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{50\cdot 51}\right)=2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{51}\right)=\dfrac{49}{51}$.	Thay $1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ để viết mỗi số hạng thành $\dfrac{2}{k(k+1)}$ với $k=2,3,\ldots,50$.
Bài 2.3	$1-\dfrac{1}{x+10}=\dfrac{55}{56}\Longrightarrow\dfrac{1}{x+10}=\dfrac{1}{56}\Longrightarrow x=46$.	Chia hai vế cho 3 để tử của mỗi phân số đúng bằng hiệu hai thừa số ở mẫu ($1,2,3,\ldots,10$).

CHUYÊN ĐỀ 3 / 5 • TRÍCH ĐOẠN ĐỌC THỬ (3 BÀI MẪU + 3 TỰ LUYỆN)

CHUYÊN ĐỀ 3. SO SÁNH PHÂN SỐ & CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC PHÂN SỐ

So sánh phân số và chứng minh bất đẳng thức phân số là chuyên đề phân loại kinh điển, xuất hiện gần như chắc chắn ở câu $0{,}5$–1 điểm chốt 9–10 trong đề thi cuối học kì 2 cũng như câu tự luận phân hóa cao nhất trong đề thi Học sinh giỏi Toán 6 cấp Quận/Huyện và trường Chất lượng cao. Chuyên đề rèn luyện toàn diện tư duy ước lượng sắc bén: từ phân số trung gian, phần bù – phần hơn, nhân cơ số lũy thừa cho đến kĩ thuật làm trội – làm giảm, chia nhóm tổng điều hòa, đánh giá tích lũy thừa và kẹp giữa hai số nguyên liên tiếp. Làm chủ trọn vẹn 35 bài toán trọng tâm dưới đây sẽ giúp các em tự tin hóa giải mọi dạng bất đẳng thức phân số trong phòng thi.

A. TÓM TẮT PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH

1. So sánh bằng phân số trung gian, phần bù – phần hơn & nhân cơ số $a \cdot A$

- **Phân số trung gian:** Để so sánh $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$, tìm phân số x (thường chọn $\frac{a}{d}$, $\frac{c}{b}$ hoặc phân số đẹp như $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{20}$) sao cho $\frac{a}{b} < x < \frac{c}{d}$. - **Phần bù đến 1 & phần hơn so với 1:** Với phân số dương nhỏ hơn 1, phân số nào có phần bù đến 1 nhỏ hơn thì lớn hơn ($1 - A < 1 - B \implies A > B$). Với phân số lớn hơn 1, phân số nào có phần hơn so với 1 lớn hơn thì lớn hơn ($A - 1 > B - 1 \implies A > B$). - **Nhân cơ số lũy thừa:** Gặp phân số dạng $A = \dfrac{a^n + c}{a^{n+1} + c}$ (hoặc dấu trừ), nhân cả hai vế với a để tách phần nguyên 1: $a \cdot A = 1 + \dfrac{c(a-1)}{a^{n+1} + c}$, từ đó so sánh ngay hai phân số cùng tử.

2. Kĩ thuật làm trội – làm giảm từng số hạng về tổng khử liên tiếp

- **Cặp bất đẳng thức vàng cho mẫu bình phương ($k \geq 2$):**

$$\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$$

- **Lưu ý giữ số hạng đầu để đánh giá chặt:** Khi cần chứng minh $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{3}{4}$ (thay vì < 1), ta giữ nguyên $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ và chỉ làm trội từ $k = 3$ trở đi. - **Mở rộng cho mẫu số lẻ và bậc 3:** Với $k \geq 1$ dùng $(2k+1)^2 > 2k(2k+2)$ để làm trội $\frac{2}{(2k+1)^2} < \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}$; với $k \geq 2$ dùng $k^3 > (k-1)k(k+1)$ để đưa về tổng khử bậc 3.

3. Kĩ thuật chia nhóm tổng điều hòa & đánh giá tích lũy thừa

- **Chia nhóm đều & ghép cặp đầu–cuối:** Với tổng $\sum \frac{1}{k}$, thay mọi số hạng trong mỗi nhóm bằng số hạng lớn nhất (để chặn trên) hoặc nhỏ nhất (để chặn dưới). Muốn chặn thật chặt, ghép cặp đầu–cuối $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$ để tận dụng quy luật tích ab tăng dần khi hai số tiến gần nhau. - **Chia nhóm theo lũy thừa của 2:** Để chặn trên $\sum_{k=1}^{2^m-1}\frac{1}{k}<m$, đặt $\frac{1}{2^r}$ ở đầu mỗi ngoặc; để chặn dưới $>\frac{m}{2}$, đặt $\frac{1}{2^r}$ ở cuối mỗi ngoặc. - **Đánh giá tích dạng Wallis:** Cho $P=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$, lập tích trung gian $Q=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}$. Từ $P<Q$ suy ra $P^2<P\cdot Q=\frac{1}{2n+1}$ (tổng quát với bước nhảy 3, ghép 3 tích để đánh giá P^3).

4. Kĩ thuật kẹp giữa hai số nguyên liên tiếp & lũy thừa lớn nhất của $2,3$

- **Phương pháp kẹp ($k<S<k+1$):** Nếu chứng minh được S nằm nghiêm ngặt giữa hai số nguyên liên tiếp k và $k+1$ ($k\in\mathbb{Z}$) thì kết luận ngay S không phải là số nguyên (và không là số tự nhiên). Với tổng $\sum\frac{k^2-1}{k^2}$, tách $1-\frac{1}{k^2}$ để lộ phần nguyên m trừ đi một tổng nằm trong $(0;1)$. - **Phương pháp lũy thừa lớn nhất (chứng minh tổng điều hòa không nguyên):** Với $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ ($n\ge 2$), chọn $2^k\le n<2^{k+1}$ là lũy thừa lớn nhất của 2 trong các mẫu. Khi nhân H_n với $B=2^{k-1}\cdot M$ (M là BCNN các số lẻ $\le n$), mọi số hạng trừ $\frac{B}{2^k}=\frac{M}{2}$ đều nguyên, suy ra $B\cdot H_n$ không nguyên nên $H_n\notin\mathbb{N}$.

B. HỆ THỐNG BÀI TẬP TINH TUYỂN & LỜI GIẢI CHI TIẾT

TẦNG 1: CHỐT ĐIỂM 9 – 10 THI TRƯỜNG & KHẢO SÁT (2 BÀI)

Bài 66 So sánh phân số bằng phân số trung gian và phần bù đến $\frac{1}{2}$ • Tầng 1 • 9–10đ ★☆☆

Không quy đồng mẫu số, hãy so sánh các cặp phân số sau:

a) $\frac{15}{301}$ và $\frac{25}{499}$;

b) $-\frac{22}{45}$ và $-\frac{51}{103}$.

(Nguồn: Tuyển chọn từ Đề thi HSG Toán 6 cấp Huyện và Trường THCS Nguyễn Khuyến)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

a) So sánh $\frac{15}{301}$ và $\frac{25}{499}$:

Nhận thấy $15\cdot 20=300$ rất gần 301 và $25\cdot 20=500$ rất gần 499, nên ta chọn phân số trung gian là $\frac{1}{20}$.

Ta có:

$$\frac{15}{301}<\frac{15}{300}=\frac{1}{20}=\frac{25}{500}<\frac{25}{499}$$

Theo tính chất bắc cầu, suy ra $\frac{15}{301}<\frac{25}{499}$.

b) So sánh $-\frac{22}{45}$ và $-\frac{51}{103}$:

Trước hết, ta so sánh hai phân số dương đối ứng là $\frac{22}{45}$ và $\frac{51}{103}$. Cả hai phân số này đều nhỏ hơn và rất gần $\frac{1}{2}$, nên ta xét phần bù đến $\frac{1}{2}$ của mỗi phân số:

$$\frac{1}{2}-\frac{22}{45}=\frac{45-44}{90}=\frac{1}{90}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{51}{103}=\frac{103-102}{206}=\frac{1}{206}$$

Vì $90<206$ nên $\frac{1}{90}>\frac{1}{206}$, tức là $\frac{1}{2}-\frac{22}{45}>\frac{1}{2}-\frac{51}{103}$.

Suy ra $\frac{22}{45}<\frac{51}{103}$. Khi đổi dấu sang phân số âm, chiều bất đẳng thức đảo ngược:

$$-\frac{22}{45}>-\frac{51}{103}$$

NHẬN XÉT: Ở câu (b), cả $\frac{22}{45}$ và $\frac{51}{103}$ đều nhỏ hơn $\frac{1}{2}$ nên không thể dùng $\frac{1}{2}$ làm phân số trung gian trực tiếp. Khi hai phân số cùng nằm về một phía và sát mốc $\frac{1}{2}$, hãy lập ngay **phần bù đến** $\frac{1}{2}$ — tử số sẽ rơi thẳng về 1 cực gọn! Và đừng quên: khi so sánh phân số âm, số đối nhỏ hơn thì phân số âm lớn hơn.

Bài 76 So sánh hai biểu thức phân số khác cấu trúc bằng số trung gian nguyên • Tầng 1 • 9–10đ ★★☆

So sánh P và Q, biết:

$$P=\frac{2024}{2025}+\frac{2025}{2026}+\frac{2026}{2024} \qquad \text{và} \qquad Q=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{17}$$

(Nguồn: Biến thể cập nhật năm thi từ Đề khảo sát HSG vòng 5 Toán 6 năm học 2024 – 2025, phòng GD&ĐT Đông Hưng – Thái Bình (Câu 3.3))

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ta chọn số trung gian là 3 để so sánh P và Q.

Bước 1: Chứng minh $P>3$.

Tách mỗi phân số của P theo số 1:

$$P=\left(1-\frac{1}{2025}\right)+\left(1-\frac{1}{2026}\right)+\left(1+\frac{2}{2024}\right)=3+\left(\frac{1}{2024}-\frac{1}{2025}\right)+\left(\frac{1}{2024}-\frac{1}{2026}\right)$$

Vì $0<2024<2025<2026$ nên $\frac{1}{2024}-\frac{1}{2025}>0$ và $\frac{1}{2024}-\frac{1}{2026}>0$. Suy ra:

$$P>3$$

Bước 2: Chứng minh $Q<3$.

Tổng Q có $17-3+1=15$ số hạng. Chia Q thành 3 nhóm đều nhau, mỗi nhóm gồm 5 số hạng:

$$Q=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\cdots+\frac{1}{17}\right)$$

Làm trội mỗi nhóm bằng phân số lớn nhất trong nhóm (và ở nhóm cuối làm trội thêm $\frac{1}{13}<\frac{1}{12}$ để tính nhẩm gọn):

$$Q<5\cdot\frac{1}{3}+5\cdot\frac{1}{8}+5\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{3}+\frac{5}{8}+\frac{5}{12}=\frac{40+15+10}{24}=\frac{65}{24}<\frac{72}{24}=3$$

Từ $Q<3$ và $3<P$, theo tính chất bắc cầu suy ra $P>Q$.

NHẬN XÉT: Bài toán kết hợp cực khéo hai kĩ năng: tách phần bù – phần hơn cho P (tách $\frac{2}{2024}=\frac{1}{2024}+\frac{1}{2024}$ để triệt tiêu hai phần bù âm) và chia nhóm 5 số hạng cho Q. Lưu ý rằng Q thực tế còn nhỏ hơn $2{,}7$, nên làm trội $\frac{5}{13}<\frac{5}{12}$ vừa đúng tuyệt đối vừa tránh mẫu chung 312 rườm rà.

TẦNG 2: VƯƠN TẦM HỌC SINH GIỎI QUẬN/HUYỆN & CLC (1 BÀI)

Bài 86 Bất đẳng thức tổng hỗn hợp $\sum \frac{k}{4^k}$ (kĩ thuật nhân cơ số hai lần) • Tầng 2 • HSG ★★★

Cho tổng gồm 2014 số hạng:

$$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \cdots + \frac{2014}{4^{2014}}$$

Chứng minh rằng $S < \frac{1}{2}$.

(Nguồn: Đề khảo sát HSG Toán 6 năm học 2025 – 2026, trường THCS Tân Thọ – Thanh Hóa (Câu VI))

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Nhân cả hai vế của S với cơ số 4, ta có:

$$4S = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \cdots + \frac{2014}{4^{2013}}$$

Lấy $4S$ trừ S theo vế, đồng thời ghép các phân số có cùng mẫu số:

$$3S = 4S - S = 1 + \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4^2} - \frac{2}{4^2}\right) + \cdots + \left(\frac{2014}{4^{2013}} - \frac{2013}{4^{2013}}\right) - \frac{2014}{4^{2014}}$$

$$3S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{2013}} - \frac{2014}{4^{2014}}$$

Đặt $T = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{2013}}$. Tiếp tục nhân T với 4:

$$4T = 4 + 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{2012}}$$

Suy ra:

$$3T = 4T - T = 4 - \frac{1}{4^{2013}} < 4 \implies T < \frac{4}{3}$$

Thay vào biểu thức của $3S$, vì $\frac{2014}{4^{2014}} > 0$ nên:

$$3S = T - \frac{2014}{4^{2014}} < T < \frac{4}{3}$$

Chia cả hai vế cho 3, ta thu được:

$$S < \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$$

Vậy $S < \frac{1}{2}$ (điều phải chứng minh).

NHẬN XÉT: Tử số là cấp số cộng $(1, 2, 3, \ldots)$, mẫu số là cấp số nhân $(4, 4^2, 4^3, \ldots)$ — đây gọi là **tổng cấp số cộng – nhân**. Một lần nhân a rồi trừ sẽ hạ cấp số cộng về hằng số 1, tạo ra tổng cấp số nhân thuần T; nhân a lần thứ hai sẽ ra chặn trên chặt nhất $\frac{a}{(a-1)^2}$ (ở đây là $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$)!

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN TƯƠNG TỰ — ĐỔI SỐ & BIẾN THỂ (3 BÀI)

Bài tự luyện 3.1. (Tương tự Bài 66) Không quy đồng mẫu số, hãy so sánh: a) $\frac{19}{60}$ và $\frac{31}{90}$; b) $-\frac{17}{35}$ và $-\frac{43}{85}$.

Bài tự luyện 3.2. (Tương tự Bài 76) Cho $M = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{17}$. Chứng minh rằng $M < 2$.

Bài tự luyện 3.3. (Tương tự Bài 86) Cho $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{100}{3^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{3}{4}$.

ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN VẮN TẮT — CHUYÊN ĐỀ 3

Bài	Đáp số / Kết luận	Hướng dẫn mấu chốt
Bài 3.1	a) $\frac{19}{60} < \frac{31}{90}$; b) $-\frac{17}{35} > -\frac{43}{85}$.	a) Chọn phân số trung gian là $\frac{1}{3}$. b) So sánh hai số đối với phân số trung gian $\frac{1}{2}$ rồi đổi chiều bất đẳng thức.
Bài 3.2	$M < 1 + \frac{8}{10} = \frac{9}{5} < 2$.	Tổng M có 13 số hạng; chia thành 2 nhóm: 5 số đầu ($\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{9} < 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$) và 8 số sau ($\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{17} < 8 \cdot \frac{1}{10} < 1$).
Bài 3.3	$2A < \frac{3}{2} \implies A < \frac{3}{4}$.	Tính $2A = 3A - A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$, rồi tính tiếp tổng phụ $B = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{99}} < \frac{3}{2}$.

CHUYÊN ĐỀ 4 / 5 • TRÍCH ĐOẠN ĐỌC THỬ (3 BÀI MẪU + 3 TỰ LUYỆN)

CHUYÊN ĐỀ 4. PHÂN SỐ TỐI GIẢN, PHÂN SỐ NGUYÊN & PHƯƠNG TRÌNH PHÂN SỐ NGHIỆM NGUYÊN

Phân số tối giản, phân số nhận giá trị nguyên và phương trình phân số nghiệm nguyên là bộ ba chuyên đề cốt lõi nối liền Số học với Phân số trong các đề kiểm tra giữa kì II, cuối kì II chốt điểm 9–10 và đề thi Học sinh giỏi Toán 6. Làm chủ thuật toán khử ẩn n bằng ƯCLN, kĩ thuật tách phần nguyên, quy tắc BCNN–ƯCLN cho bộ phân số và phương pháp phân tích nhân tử – đánh giá chặn biến sẽ giúp học sinh tự tin chinh phục trọn vẹn mọi dạng toán phân loại khó nhất.

A. TÓM TẮT PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH

1. Chứng minh phân số $\frac{an+b}{cn+d}$ tối giản bằng khử n

Đặt $d = \text{ƯCLN}(an+b,\ cn+d)$ ($d \in \mathbb{N}^*$). Từ $(an+b)\vdots d$ và $(cn+d)\vdots d$, nhân chéo thích hợp để khử n: $[c(an+b) - a(cn+d)]\vdots d \Rightarrow |bc-ad|\vdots d$. Nếu $|bc-ad| = 1$ thì kết luận ngay $d=1$; nếu $|bc-ad| > 1$, xét các ước nguyên tố p của $|bc-ad|$ và chỉ ra tử hoặc mẫu không chia hết cho p (như xét tính chẵn lẻ, số dư chia $3, 5$) để loại và suy ra $d = 1$.

2. Điều kiện của n để phân số tối giản / rút gọn được & đếm n

Phân số $\frac{A(n)}{B(n)}$ rút gọn được khi và chỉ khi tử và mẫu có ít nhất một ước nguyên tố chung p. Khử n để suy ra p là ước nguyên tố của một hằng số K, sau đó giải điều kiện chia hết $A(n)\vdots p$ và $B(n)\vdots p$ để tìm dạng $n = pk + r$. Để phân số tối giản, n phải tránh đồng thời mọi dạng $pk + r$. Khi đếm số giá trị n trong khoảng có từ hai ước nguyên tố trở lên, nhớ áp dụng nguyên lí bù trừ để không đếm trùng.

3. Tách phần nguyên tìm n & tìm phân số lớn nhất/nhỏ nhất chia hết cho nhiều phân số

Để $\frac{an+b}{cn+d} \in \mathbb{Z}$ (với $cn+d \neq 0$), tách phần nguyên $\frac{an+b}{cn+d} = q + \frac{r}{cn+d}$ (hoặc nhân tử với c để tạo bội của mẫu), suy ra $(cn+d) \in \text{Ư}(r)$ rồi lập bảng tìm n (bắt buộc thử lại nếu đã nhân thêm hệ số!). Với bộ phân số tối giản dương $\frac{a_i}{b_i}$: phân số dương tối giản nhỏ nhất chia hết cho mọi $\frac{a_i}{b_i}$ là $\frac{\text{BCNN}(a_i)}{\text{ƯCLN}(b_i)}$; phân số dương tối giản lớn nhất mà mọi $\frac{a_i}{b_i}$ chia hết cho nó là $\frac{\text{ƯCLN}(a_i)}{\text{BCNN}(b_i)}$.

4. Giải phương trình phân số nghiệm nguyên $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a}{b}$

Hai vũ khí chủ lực: (i) **Quy đồng – phân tích nhân tử**: đưa phương trình về dạng tích $(ax-b)(ay-b) = b^2$ (hoặc $(mx+p)(ny+q) = k$) rồi xét các cặp ước nguyên phù hợp; (ii) **Đánh giá chặn biến**: giả sử thứ tự $x \le y$ (hoặc $x \le y \le z$ với phương trình ba ẩn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$), từ đó chặn giá trị biến nhỏ nhất x vào vài trường hợp hữu hạn để giải dứt điểm.

B. HỆ THỐNG BÀI TẬP TINH TUYỂN & LỜI GIẢI CHI TIẾT

TẦNG 1: CHỐT ĐIỂM 9 – 10 THI TRƯỜNG & KHẢO SÁT (2 BÀI)

Bài 101 Chứng minh phân số tối giản bậc nhất hệ số nhỏ • Tầng 1 • 9–10đ ★☆☆

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, các phân số sau đều là phân số tối giản:

a) $A = \dfrac{2n+3}{3n+5}$;

b) $B = \dfrac{5n+2}{2n+1}$.

(Nguồn: Đề khảo sát HSG Toán 6 huyện Đông Hưng (Thái Bình) năm 2024–2025 & Chuyên đề Phân số Toán 6)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Nhận xét: với mọi $n \in \mathbb{Z}$ thì $3n+5 \neq 0$ và $2n+1 \neq 0$ (vì $3n = -5$ và $2n = -1$ không có nghiệm nguyên), nên A và B luôn là các phân số.

a) Gọi $d = \text{ƯCLN}(2n+3,\ 3n+5)$ với $d \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó:

$$(2n+3) \vdots d \quad \text{và} \quad (3n+5) \vdots d.$$

Nhân hai biểu thức với 3 và 2 để hệ số của n cùng bằng 6:

$$3(2n+3) = (6n+9) \vdots d \quad \text{và} \quad 2(3n+5) = (6n+10) \vdots d.$$

Suy ra hiệu của chúng cũng chia hết cho d:

$$[(6n+10) - (6n+9)] \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d.$$

Vì $d \in \mathbb{N}^*$ nên $d = 1$. Do đó $\text{ƯCLN}(2n+3,\ 3n+5) = 1$, hay phân số $A = \dfrac{2n+3}{3n+5}$ tối giản với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

b) Gọi $d = \text{ƯCLN}(5n+2,\ 2n+1)$ với $d \in \mathbb{N}^*$.

Ta có:

$$(5n+2) \vdots d \Rightarrow 2(5n+2) = (10n+4) \vdots d,$$

$$(2n+1) \vdots d \Rightarrow 5(2n+1) = (10n+5) \vdots d.$$

Suy ra:

$$[(10n+5) - (10n+4)] \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1.$$

Vậy phân số $B = \dfrac{5n+2}{2n+1}$ tối giản với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

NHẬN XÉT: Kĩ thuật nhân chéo khử n cho hiệu bằng 1 là mẫu mực cơ bản nhất của bài toán chứng minh phân số tối giản.

Luôn ghi rõ điều kiện $d \in \mathbb{N}^*$ (vì ƯCLN là số nguyên dương) để từ $1 \vdots d$ kết luận dứt khoát $d = 1$.

Bài 110 Nhân hệ số tạo bội mẫu và bắt buộc thử lại điều kiện đủ • Tầng 1 • 9–10đ ★★☆

a) Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $A=\dfrac{n+10}{2n-8}$ có giá trị là một số nguyên.

b) Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $B=\dfrac{3n+2}{4n-5}$ có giá trị là một số tự nhiên.

(Nguồn: Chuyên đề Phân số – Ôn thi Học sinh giỏi Toán 6)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

a) Điều kiện: $n\in\mathbb{N}$ và $2n-8\neq 0\Rightarrow n\neq 4$.

Để $A=\dfrac{n+10}{2n-8}\in\mathbb{Z}$ thì $(n+10)\vdots(2n-8)$, suy ra:

$$2(n+10)\vdots(2n-8)\Rightarrow(2n+20)\vdots(2n-8).$$

Mà $2n+20=(2n-8)+28$, nên $28\vdots(2n-8)\Rightarrow 14\vdots(n-4)$.

Do $n\in\mathbb{N}$ nên $n-4\geq -4$, suy ra $(n-4)\in\{-2;\,-1;\,1;\,2;\,7;\,14\}$, ứng với $n\in\{2;\,3;\,5;\,6;\,11;\,18\}$.

Vì phép nhân tử với 2 chỉ cho điều kiện cần (nếu $2A\in\mathbb{Z}$ thì A vẫn có thể có mẫu 2), ta **bắt buộc thử lại** từng giá trị vào A:

- $n=2\Rightarrow A=\dfrac{12}{-4}=-3\in\mathbb{Z}$ (nhận);
- $n=3\Rightarrow A=\dfrac{13}{-2}\notin\mathbb{Z}$ (loại);
- $n=5\Rightarrow A=\dfrac{15}{2}\notin\mathbb{Z}$ (loại);
- $n=6\Rightarrow A=\dfrac{16}{4}=4\in\mathbb{Z}$ (nhận);
- $n=11\Rightarrow A=\dfrac{21}{14}=\dfrac{3}{2}\notin\mathbb{Z}$ (loại);
- $n=18\Rightarrow A=\dfrac{28}{28}=1\in\mathbb{Z}$ (nhận).

Vậy $n\in\{2;\,6;\,18\}$.

b) Với mọi $n\in\mathbb{Z}$, $4n-5\neq 0$. Nếu $B=\dfrac{3n+2}{4n-5}\in\mathbb{N}$ thì $(3n+2)\vdots(4n-5)$, suy ra:

$$4(3n+2)\vdots(4n-5)\Rightarrow(12n+8)\vdots(4n-5).$$

Ta viết $12n+8=3(4n-5)+23$, suy ra $23\vdots(4n-5)$, tức $(4n-5)\in\{-23;\,-1;\,1;\,23\}$.

- $4n-5=-23\Rightarrow 4n=-18$ (loại vì $n\in\mathbb{Z}$);
- $4n-5=-1\Rightarrow 4n=4\Rightarrow n=1$. Thử lại: $B=\dfrac{5}{-1}=-5\notin\mathbb{N}$ (loại!);
- $4n-5=1\Rightarrow 4n=6$ (loại);
- $4n-5=23\Rightarrow 4n=28\Rightarrow n=7$. Thử lại: $B=\dfrac{23}{23}=1\in\mathbb{N}$ (nhận).

Vậy duy nhất $n=7$ thỏa mãn đề bài.

NHẬN XÉT: Đây là bài toán "đánh rơi điểm" nhiều nhất ở lớp 6! Khi hệ số của n trên tử không chia hết cho hệ số của n dưới mẫu nên ta phải nhân tử với hệ số $k > 1$, nghiệm tìm được có thể là **nghiệm ngoại lai** (như $n = 3; 5; 11$ ở câu a) hoặc cho giá trị nguyên âm (như $n = 1$ ở câu b). Luôn thử lại trước khi kết luận!

TẦNG 2: VƯƠN TẦM HỌC SINH GIỎI QUẬN/HUYỆN & CLC (1 BÀI)

Bài 119 Tìm điều kiện của n để phân số rút gọn được hoặc tối giản (một ước nguyên tố) • Tầng 2 • HSG ★★★

a) Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $A = \dfrac{18n+3}{21n+7}$ rút gọn được.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $B = \dfrac{3n+2}{7n+1}$ là phân số tối giản.

(Nguồn: Chuyên đề Bồi dưỡng HSG Toán 6 – Phân số tối giản & rút gọn được)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

a) Phân số $A = \dfrac{18n+3}{21n+7}$ rút gọn được khi và chỉ khi $18n+3$ và $21n+7$ có ít nhất một ước nguyên tố chung p.

Giả sử p là ước nguyên tố chung của $18n+3$ và $21n+7$. Vì $\text{BCNN}(18,\,21) = 126$, ta có:

$$(18n+3)\vdots p \Rightarrow 7(18n+3) = (126n+21)\vdots p,$$

$$(21n+7)\vdots p \Rightarrow 6(21n+7) = (126n+42)\vdots p.$$

Suy ra $[(126n+42)-(126n+21)]\vdots p \Rightarrow 21\vdots p$. Vì p là số nguyên tố nên $p \in \{3;\,7\}$.

- Xét $p = 3$: ta thấy $21n\vdots 3$ nhưng 7 không chia hết cho 3, nên $21n+7$ không chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vậy $p = 3$ không thể xảy ra.
- Xét $p = 7$: với mọi $n \in \mathbb{N}$ luôn có $(21n+7) = 7(3n+1)\vdots 7$. Do đó A rút gọn được khi và chỉ khi:

$$(18n+3)\vdots 7 \Leftrightarrow (21n-3n+3)\vdots 7 \Leftrightarrow 3(n-1)\vdots 7.$$

Vì $\text{ƯCLN}(3,\,7) = 1$ nên $(n-1)\vdots 7 \Leftrightarrow n = 7k+1$ $(k \in \mathbb{N})$.

Ngược lại, với $n = 7k+1$ $(k \in \mathbb{N})$ thì cả tử và mẫu đều chia hết cho 7 nên A rút gọn được. Vậy $n = 7k+1$ ($k \in \mathbb{N}$).

b) Gọi p là ước nguyên tố chung (nếu có) của $3n+2$ và $7n+1$. Khi đó:

$$7(3n+2) - 3(7n+1) = (21n+14) - (21n+3) = 11\vdots p.$$

Vì p là số nguyên tố nên $p = 11$.

Ta tìm điều kiện để $3n+2$ và $7n+1$ cùng chia hết cho 11:

$$(3n+2)\vdots 11 \Leftrightarrow (3n+2-11)\vdots 11 \Leftrightarrow 3(n-3)\vdots 11 \Leftrightarrow (n-3)\vdots 11 \Leftrightarrow n = 11k+3 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Kiểm tra mẫu số khi $n = 11k+3$: $7n+1 = 7(11k+3)+1 = 77k+22 = 11(7k+2)\vdots 11$.

Như vậy B rút gọn được khi và chỉ khi $n = 11k+3$ $(k \in \mathbb{N})$.

Do đó, B là phân số tối giản khi và chỉ khi $n \neq 11k+3$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ (tức n chia cho 11 có số dư khác 3).

NHẬN XÉT: Trong bài toán "rút gọn được" hay "tối giản", luôn bắt buộc kiểm tra **hai chiều**! Sau khi giải $(3n+2)\vdots 11 \Rightarrow n = 11k+3$, ta phải thay ngược vào mẫu $7n+1$ để xác nhận $7n+1$ cũng chia hết cho 11 thì mới có quan hệ tương đương (khi và chỉ khi).

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN TƯƠNG TỰ — ĐỔI SỐ & BIẾN THỂ (3 BÀI)

Bài tự luyện 4.1. (Tương tự Bài 101) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, hai phân số $C = \dfrac{n+1}{2n+3}$ và $D = \dfrac{3n+2}{5n+3}$ đều là phân số tối giản.

Bài tự luyện 4.2. (Tương tự Bài 110) Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $P = \dfrac{n+7}{3n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Bài tự luyện 4.3. (Tương tự Bài 119) Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $C = \dfrac{2n+7}{5n+2}$ là phân số tối giản.

ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN VẮN TẮT — CHUYÊN ĐỀ 4

Bài	Đáp số / Kết luận	Hướng dẫn mấu chốt
Bài 4.1	**Cả hai hiệu đều bằng 1, suy ra ƯCLN của tử và mẫu bằng 1 nên C và D tối giản với mọi $n \in \mathbb{N}$.**	Với C, xét hiệu $(2n+3)-2(n+1)$; với D, xét hiệu $5(3n+2)-3(5n+3)$.
Bài 4.2	$n \in \{-7;\ 0;\ 1;\ 4\}$ **(ứng với** $P \in \{0;\ -7;\ 4;\ 1\}$**).**	Nhân tử số với 3 để thu được $22\vdots(3n-1)$, tìm các giá trị $n \in \mathbb{Z}$ rồi thử lại vào P.
Bài 4.3	$n \neq 31k+12$ **với mọi** $k \in \mathbb{N}$ **(hay** n **chia** 31 **có số dư khác** 12**).**	Khử n bằng $5(2n+7)-2(5n+2)=31$ (số nguyên tố), rồi giải điều kiện $(2n+7)$ không chia hết cho 31.

CHUYÊN ĐỀ 5 / 5 • TRÍCH ĐOẠN ĐỌC THỬ (3 BÀI MẪU + 3 TỰ LUYỆN)

CHUYÊN ĐỀ 5. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (CỰC TRỊ) CỦA BIỂU THỨC PHÂN SỐ

Các bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức phân số là câu phân loại kinh điển chốt điểm 9–10 trong đề kiểm tra giữa kì 2, cuối kì 2 và là "đặc sản" không thể thiếu của mọi đề thi Học sinh giỏi Toán 6 cấp Quận/Huyện. Khác với cực trị đa thức thông thường, cực trị phân số ẩn chứa nhiều cạm bẫy tinh vi như đổi chiều bất đẳng thức khi có dấu trừ, quên xét riêng mẫu dương và mẫu âm trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$, hoặc đặt mẫu bằng ± 1 dù không tồn tại nghiệm nguyên. Chuyên đề 5 hệ thống trọn vẹn 20 bài toán tinh tuyển (từ mức chốt điểm 9–10 đến đỉnh cao HSG) cùng 20 bài tự luyện có kiểm chứng chặt chẽ, giúp học sinh làm chủ hoàn toàn mọi dạng cực trị phân số lớp 6.

A. TÓM TẮT PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH

1. Dạng phân thức mẫu không âm c/(A² + k) và c/(|A| + k) (c > 0, k > 0)

- Với tử số dương không đổi $c > 0$ và mẫu số dương $M > 0$: phân số $\frac{c}{M}$ đạt **giá trị lớn nhất** khi và chỉ khi mẫu số M đạt **giá trị nhỏ nhất**. - Nhờ tính không âm $A^2 \geq 0$ và $|A| \geq 0$, ta có $A^2 + k \geq k > 0$ và $|A| + k \geq k > 0$, suy ra $\frac{c}{A^2+k} \leq \frac{c}{k}$ và $\frac{c}{|A|+k} \leq \frac{c}{k}$. - **Cẩn thận dấu trừ**: với biểu thức dạng $m - \frac{c}{A^2+k}$ ($c > 0$), để biểu thức đạt **GTNN** thì $\frac{c}{A^2+k}$ phải đạt **GTLN** $\Leftrightarrow$ mẫu $A^2 + k$ nhỏ nhất.

2. Dạng phân số bậc nhất (an + b)/(cn + d) trên ℤ: tách phần nguyên & xét dấu mẫu

- Bước 1: Ghi rõ điều kiện mẫu $cn + d \neq 0$ rồi tách phần nguyên (có thể nhân hai vế với c nếu a không chia hết cho c) để đưa về dạng $q + \frac{r}{cn+d}$ với q, r là hằng số ($r \neq 0$). - Bước 2: **Bắt buộc xét riêng hai miền dấu của mẫu** $cn + d > 0$ và $cn + d < 0$! - Nếu $r > 0$: muốn $\frac{r}{cn+d}$ **lớn nhất** thì $cn + d$ phải là **số nguyên dương nhỏ nhất**; muốn **nhỏ nhất** thì $cn + d$ phải là **số nguyên âm lớn nhất**. - Nếu $r < 0$: chiều cực trị **đảo ngược hoàn toàn** — muốn $\frac{r}{cn+d}$ **lớn nhất** thì $cn + d$ phải nguyên âm lớn nhất; muốn **nhỏ nhất** thì $cn + d$ phải nguyên dương nhỏ nhất!

3. Cực trị với điều kiện ràng buộc (n ∈ ℕ, phân số rút gọn, x + y = k, miền chặn)

- Khi đề giới hạn $n \in \mathbb{N}$ và mẫu $cn + d$ luôn dương với mọi $n \in \mathbb{N}$ (như $5n + 4 \geq 4$), cực trị rơi ngay tại biên $n = 0$ (chú ý không tồn tại cực trị đầu kia trên $\mathbb{N}$). - Khi kèm điều kiện **phân số rút gọn được**, dùng $\text{ƯCLN}(an + b, cn + d) = \text{ƯCLN}(r, cn + d) > 1$ để lọc đúng các giá trị n chia hết cho ước nguyên tố của r trước khi chọn mẫu nhỏ nhất. - Với phân số hai biến có tổng $x + y = k$, hãy thế $x = k - y$ để đưa về một ẩn rồi tách phần nguyên; với biến bị chặn độc lập $a \leq x \leq b$ và $c \leq y \leq d$, hãy tách về dạng $q \pm \frac{x}{x+y}$ và đánh giá trực tiếp tỉ số $\frac{x}{y}$.

4. Cực trị phân thức bậc hai, tổng nhiều phân số & bẫy dấu "=" trên ℕ, ℤ

- Với phân thức bậc hai $\frac{a(n-k)^2+b}{(n-k)^2+c}$ ($c > 0$), luôn tách phần nguyên thành $a + \frac{b-ac}{(n-k)^2+c}$ rồi đưa về Dạng 1. - Với tổng phân số đối xứng khi biết $a + b = 2m$, dùng hằng đẳng thức ẩn $a = m + t,\ b = m - t \Rightarrow ab = m^2 - t^2$ để chặn tích ab cực gọn bằng kiến thức lớp 6. - **Nguyên tắc kiểm tra dấu "="**: Luôn giải ra giá trị cụ thể của ẩn và đối chiếu tập $\mathbb{N}$ hay $\mathbb{Z}$! Nếu $A = 2x - 5$ luôn lẻ thì $|2x - 5| \geq 1$; nếu mẫu là $5n - 2$ thì trên $\mathbb{Z}$ mẫu **không bao giờ nhận** ± 1 mà chỉ nhận nhỏ nhất dương bằng 3 và lớn nhất âm bằng -2.

B. HỆ THỐNG BÀI TẬP TINH TUYỂN & LỜI GIẢI CHI TIẾT

TẦNG 1: CHỐT ĐIỂM 9 – 10 THI TRƯỜNG & KHẢO SÁT (2 BÀI)

Bài 131 Tìm GTLN của phân số dạng c/(A² + k) • Tầng 1 • 9–10đ ★☆☆

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \dfrac{2025}{(x-3)^2+5}$ với $x \in \mathbb{Z}$ và tìm giá trị của x để A đạt giá trị lớn nhất đó.

(Nguồn: Tuyển chọn đề kiểm tra cuối học kì 2 Toán 6 các trường THCS Hà Nội)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Với mọi số nguyên x, ta luôn có:

$$(x-3)^2 \geq 0.$$

Cộng hai vế với 5, ta được:

$$(x-3)^2 + 5 \geq 5 > 0.$$

Vì tử số $2025 > 0$ không đổi và mẫu số $(x-3)^2+5 \geq 5 > 0$, nên phân số A đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi mẫu số đạt giá trị nhỏ nhất:

$$A = \frac{2025}{(x-3)^2+5} \leq \frac{2025}{5} = 405.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad (\text{thỏa mãn } x \in \mathbb{Z}).$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 405, đạt được khi $x = 3$.

NHẬN XÉT: Trong bài toán cực trị phân số có tử dương không đổi, nhớ ghi rõ hai điều kiện then chốt để không bị trừ điểm: mẫu số luôn **dương** ($\geq 5 > 0$) và chỉ rõ giá trị của x để dấu "=" xảy ra.

Bài 137 Tách phần nguyên tìm GTNN phân số (an + b)/(n + d) trên ℤ (mẫu âm lớn nhất) • Tầng 1 • 9–10đ ★★☆

Tìm số nguyên n để phân số $P = \dfrac{3n+5}{n-2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

(Nguồn: Tuyển chọn đề thi HSG Toán 6 cấp Quận/Huyện)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Điều kiện để P là phân số: $n-2 \neq 0 \Leftrightarrow n \neq 2$.

Ta tách phần nguyên của phân số P:

$$P = \frac{3n+5}{n-2} = \frac{3(n-2)+11}{n-2} = 3 + \frac{11}{n-2}.$$

Để P đạt giá trị nhỏ nhất thì phân số $\dfrac{11}{n-2}$ phải đạt giá trị nhỏ nhất.

Xét hai trường hợp về dấu của mẫu số $n-2$:

- Nếu $n-2 > 0$ (tức $n > 2$) thì $\dfrac{11}{n-2} > 0 \implies P > 3$.
- Nếu $n-2 < 0$ (tức $n < 2$) thì $\dfrac{11}{n-2} < 0 \implies P < 3$.

Do đó, để $\dfrac{11}{n-2}$ nhỏ nhất thì trước hết $n-2<0$. Khi đó ta viết lại:

$$\frac{11}{n-2}=-\frac{11}{2-n}\qquad(\text{với } 2-n>0).$$

Để $-\dfrac{11}{2-n}$ nhỏ nhất thì $\dfrac{11}{2-n}$ phải **lớn nhất**, tức là số nguyên dương $2-n$ phải **nhỏ nhất** (tương đương $n-2$ là **số nguyên âm lớn nhất**).

Vì $n\in\mathbb{Z}$ và $2-n>0$ nên $2-n\geq 1$, suy ra:

$$\frac{11}{2-n}\leq\frac{11}{1}=11\implies-\frac{11}{2-n}\geq-11\implies P=3-\frac{11}{2-n}\geq 3-11=-8.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$2-n=1\Leftrightarrow n=1\quad(\text{thỏa mãn } n\in\mathbb{Z},\ n\neq 2).$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -8, đạt được khi $n=1$.

> **NHẬN XÉT:** Mẹo viết lại $\dfrac{11}{n-2}=-\dfrac{11}{2-n}$ (khi $n-2<0$) giúp ta biến mẫu âm thành mẫu **dương** $2-n\geq 1$, từ đó suy luận bất đẳng thức chặt chẽ 100% và không bao giờ nhầm giữa "âm lớn nhất" (-1) với "âm nhỏ nhất"!

TẦNG 2: VƯƠN TẦM HỌC SINH GIỎI QUẬN/HUYỆN & CLC (1 BÀI)

Bài 143 GTLN & GTNN đồng thời của (an + b)/(cn + d) khi mẫu không nhận ±1 trên ℤ • Tầng 2 • HSG ★★★

Cho phân số $A=\dfrac{15n+4}{5n-2}$ với $n\in\mathbb{Z}$. Tìm cả giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của phân số A, đồng thời chỉ rõ các giá trị nguyên n tương ứng.

(Nguồn: Tuyển chọn đề thi HSG Toán 6 cấp Quận/Huyện & trường CLC Hà Nội)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Vì $n\in\mathbb{Z}$ nên $5n\vdots 5$, còn 2 không chia hết cho 5, suy ra $5n-2\neq 0$ với mọi $n\in\mathbb{Z}$.

Ta tách phần nguyên của phân số A:

$$A=\frac{15n+4}{5n-2}=\frac{3(5n-2)+10}{5n-2}=3+\frac{10}{5n-2}.$$

Nhận xét quan trọng về tập giá trị của mẫu số $5n-2$ khi $n\in\mathbb{Z}$: vì $5n-2=5(n-1)+3$, nên $5n-2$ luôn **chia 5 dư 3** (tức các giá trị có thể có là $\ldots;-12;-7;-2;3;8;13;\ldots$, **không bao giờ nhận giá trị 1 hay -1**).

1. Tìm giá trị lớn nhất của A:

- Nếu $5n-2<0$ (tức $n\leq 0$) thì $\dfrac{10}{5n-2}<0\implies A<3$.
- Nếu $5n-2>0$ (tức $n\geq 1$) thì $\dfrac{10}{5n-2}>0\implies A>3$.

Do đó, A đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $5n-2$ là **số nguyên dương nhỏ nhất** dạng $5n-2$.

Với $n\in\mathbb{Z}$ và $5n-2>0$, ta có $n\geq 1$, suy ra:

$$5n-2\geq 5\cdot 1-2=3\implies A=3+\frac{10}{5n-2}\leq 3+\frac{10}{3}=\frac{19}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $5n-2=3\Leftrightarrow n=1$ (thỏa mãn $n\in\mathbb{Z}$).

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của A:

Từ xét dấu ở trên, để A nhỏ nhất thì $5n-2<0$, tức $n\le 0$. Khi đó $2-5n>0$ và:

$$A=3-\frac{10}{2-5n}.$$

Để A nhỏ nhất thì $2-5n$ phải là **số nguyên dương nhỏ nhất** (tương đương $5n-2$ là số nguyên âm lớn nhất).

Với $n\in\mathbb{Z}$ và $n\le 0$, ta có $-5n\ge 0 \implies 2-5n\ge 2$, suy ra:

$$\frac{10}{2-5n}\le\frac{10}{2}=5 \implies A=3-\frac{10}{2-5n}\ge 3-5=-2.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2-5n=2\Leftrightarrow n=0$ (thỏa mãn $n\in\mathbb{Z}$).

Kết luận: Với $n\in\mathbb{Z}$, giá trị lớn nhất của A là $\frac{19}{3}$ (khi $n=1$) và giá trị nhỏ nhất của A là -2 (khi $n=0$).

> **NHẬN XÉT:** **Cạm bẫy phân loại HSG số 1**: Rất nhiều học sinh học vẹt đặt ngay $5n-2=1$ hay $5n-2=-1$, ra $n=\frac{3}{5}$ hoặc $n=\frac{1}{5}$ không phải số nguyên rồi bỏ cuộc! Luôn tìm **giá trị nguyên nhỏ nhất làm mẫu dương** ($n=1\Rightarrow 5n-2=3$) và **giá trị nguyên lớn nhất làm mẫu âm** ($n=0\Rightarrow 5n-2=-2$) — hai giá trị n này bao giờ cũng là **hai số nguyên liên tiếp**!

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN TƯƠNG TỰ — ĐỐI SỐ & BIẾN THỂ (3 BÀI)

Bài tự luyện 5.1. (Tương tự Bài 131) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{18}{(x+4)^2+3}$ với $x\in\mathbb{Z}$ và chỉ rõ giá trị của x để đạt giá trị lớn nhất đó.

Bài tự luyện 5.2. (Tương tự Bài 137) Tìm số nguyên n để phân số $Q=\dfrac{4n+17}{n+3}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài tự luyện 5.3. (Tương tự Bài 143) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của phân số $P=\dfrac{10n+3}{5n-2}$ với $n\in\mathbb{Z}$, cùng các giá trị của n tương ứng.

ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN VẮN TẮT — CHUYÊN ĐỀ 5

Bài	Đáp số / Kết luận	Hướng dẫn mấu chốt
Bài 5.1	$\max P=6$, đạt được khi $x=-4$.	Đánh giá $(x+4)^2+3\ge 3>0$, suy ra $P\le\frac{18}{3}=6$.
Bài 5.2	$\min Q=-1$, đạt được khi $n=-4$.	Tách $Q=4+\frac{5}{n+3}$ ($n\ne -3$). Để Q nhỏ nhất thì $n+3$ là số nguyên âm lớn nhất ($n+3=-1$).
Bài 5.3	$\max P=\frac{13}{3}$ khi $n=1$; $\min P=-\frac{3}{2}$ khi $n=0$.	Tách $P=2+\frac{7}{5n-2}$; mẫu $5n-2$ nhận giá trị dương nhỏ nhất bằng 3 (khi $n=1$) và giá trị âm lớn nhất bằng -2 (khi $n=0$).

HỌC CÙNG THẦY THẾ ANH & TỦ SÁCH TOÁN 6

🔒 ĐẶT NHẬN BẢN ĐẦY ĐỦ QUYỂN 2 (133 TRANG A4 • TRỌN BỘ 300 BÀI)

Bản đầy đủ gồm **150 bài tinh tuyển giải chi tiết** (88 bài Tầng 1 chốt 9–10 + 62 bài Tầng 2 HSG) + **150 bài tự luyện đổi số** kèm Đáp số & Hướng dẫn, kiểm định toán học 100% bằng SymPy.

👉 Nhắn tin trực tiếp qua **Zalo 0986 683 218** với mã sách: **T6Q2** (hoặc quét mã QR bên dưới) để nhận ngay bản PDF chuẩn in ấn!

📚 TRỌN BỘ 5 QUYỂN "CHINH PHỤC ĐIỂM 9–10 & HỌC SINH GIỎI TOÁN 6"

- **Quyển 1:** Số học nâng cao, Lũy thừa & Chia hết *(180 + 180 bài — Đã xuất bản)*.
- **Quyển 2:** Phân số nâng cao, Tổng dãy quy luật & Bất đẳng thức *(150 + 150 bài — Đã xuất bản)*.
- **Quyển 3:** Hình học trực quan thực tế & Hình học phẳng nâng cao *(150 + 100 bài)*.
- **Quyển 4:** Toán thực tế VDC, Tổ hợp – Dirichlet – Logic & Xác suất *(120 + 80 bài)*.
- **Quyển 5:** 30 Đề thi Học sinh giỏi Toán 6 chọn lọc chuẩn GDPT 2018.

🎓 ĐĂNG KÍ HỌC THỬ MIỄN PHÍ CÙNG THẦY THẾ ANH

- Lớp Toán 6 Nền tảng – Bứt phá điểm 9–10 và Lớp Bồi dưỡng HSG / Chất lượng cao (Online Zoom & Offline Hà Nội).
- Chấm chữa tự luận 1–1, kho video bài giảng & phòng luyện đề tự động trên **vipstudy.vn** và **thaytheanh.com**.

BIÊN SOẠN & BẢN QUYỀN

Thầy Thế Anh (ThS. Nguyễn Thế Anh)

Điện thoại / Zalo: **0986 683 218**

Website: **thaytheanh.com** • **vipstudy.vn**

Quét mã QR để nhắn Zalo cho thầy, đăng kí học thử hoặc tham gia Nhóm học tập Toán THCS – hỏi đáp bài tập trong sách & nhận bộ đề HSG mới nhất.

Zalo Thầy Thế Anh
0986 683 218

Nhóm học tập Zalo
Quét để tham gia

© Bản quyền biên soạn thuộc về **Thầy Thế Anh (ThS. Nguyễn Thế Anh)** • thaytheanh.com • vipstudy.vn
Tài liệu đã qua kiểm định toán học tự động (SymPy 300/300 PASS). Vui lòng không sao chép hoặc phát hành thương mại khi chưa có sự đồng ý của tác giả.