TỦ SÁCH CHINH PHỤC ĐIỂM 9–10 & HỌC SINH GIỎI TOÁN 6

QUYỂN 5 / 5 • THỰC CHIẾN PHÒNG THI HSG 120 PHÚT

30 ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 6 CHỌN LỌC

Chuẩn Chương Trình GDPT 2018 • Thang 20 Điểm • Có Phân Tích Chiến Thuật & Biểu Điểm

Tuyển chọn & chuẩn hóa từ 168 đề thi HSG các Quận/Huyện 2021 – 2027 • Kiểm định SymPy 100%

BẢN ĐỌC THỬ MIỄN PHÍ • 3 ĐỀ HOÀN CHỈNH ĐẠI DIỆN 3 CHẶNG (ĐỀ 01, 11, 21)

VÌ SAO BỘ 30 ĐỀ HSG NÀY GIÚP HỌC SINH BỨT PHÁ GIẢI CAO?

- ✓ **30 đề thi thật hoàn chỉnh (150 bài tự luận lớn):** mỗi đề chuẩn cấu trúc **5 bài — 20,0 điểm — 120 phút**, tách riêng *Tờ Đề thi* và *Hướng dẫn chấm chi tiết* để học sinh bấm giờ thi thử như phòng thi thật.
- ✓ **Lộ trình 3 chặng tăng tốc khoa học:** từ Cấp Trường/CLB (Đề 01–10) → Cấp Quận/Huyện chuẩn (Đề 11–20) → Chọn Đội tuyển & Giao lưu CLC (Đề 21–30).
- ✓ **Có hộp Chiến thuật phòng thi 120 phút & Lưu ý biểu điểm:** chỉ rõ câu ăn điểm chắc, câu chốt giải Nhất và các bẫy hay mất 0,25 – 0,5 điểm oan.
- ✓ **Kiểm định toán học 100% bằng SymPy (150/150 bài PASS):** không lỗi đề, không sai đáp số, toàn bộ bài hình học đầy đủ dữ kiện tự chủ.

CHẶNG 1 (ĐỀ 01 – 10)

Cấp Trường & CLB Toán 6. Củng cố toàn diện 5 mảng: Tính nhanh, Số học, Phân số, Hình học & Thực tế.

CHẶNG 2 (ĐỀ 11 – 20)

Cấp Quận / Huyện chuẩn. Chuẩn độ khó đề Sở/Phòng GD&ĐT Hà Nội, Bắc Ninh, Thanh Hóa, Nghệ An, Thái Bình...

CHẶNG 3 (ĐỀ 21 – 30)

Chọn Đội tuyển & Giao lưu CLC. Thử lửa với câu Bài 5 phân hóa giải Nhất (Dirichlet, Tổ hợp, BĐT, Số học sâu).

BIÊN SOẠN & BẢN QUYỀN

Thầy Thế Anh (ThS. Nguyễn Thế Anh)

Điện thoại / Zalo: **0986 683 218**

Website: **thaytheanh.com** • **vipstudy.vn**

Quét mã QR để nhắn Zalo cho thầy, đăng kí học thử đội tuyển HSG Toán 6 hoặc tham gia Nhóm học tập Toán THCS.

Zalo Thầy Thế Anh
0986 683 218

Nhóm học tập Zalo
Quét để tham gia

LỜI NÓI ĐẦU & CHIẾN THUẬT PHÒNG THI HSG 120 PHÚT

Các em học sinh đội tuyển, quý phụ huynh và quý thầy cô thân mến,

Để đạt giải cao (giải Nhất, giải Nhì) trong kì thi **Học sinh giỏi Toán 6 cấp Trường và cấp Quận/Huyện**, việc học từng chuyên đề riêng lẻ là điều kiện cần — nhưng **luyện đề tổng hợp bấm giờ 120 phút** mới là điều kiện đủ giúp các em làm chủ tâm lí phòng thi, phân bổ thời gian thông minh và trình bày chặt chẽ đúng chuẩn biểu điểm 20 điểm.

Quyển 5: 30 Đề thi Học sinh giỏi Toán 6 chọn lọc (Chuẩn GDPT 2018) được biên soạn từ kho 168 đề thi HSG thật các năm 2021 – 2027, sắp xếp theo **3 chặng tăng dần độ khó**. Mỗi đề gồm *Phần I: Đề thi chính thức (5 bài — 20 điểm)* đặt tách trang để các em tự in/tự bấm giờ, tiếp nối bởi *Phần II: Chiến thuật làm bài + Hướng dẫn chấm & Lời giải chi tiết từng bài*.

Chúc các em bản lĩnh, tự tin và rinh về giải thưởng cao nhất trong kì thi HSG Toán 6!
Thầy Thế Anh

CHIẾN THUẬT PHÂN BỔ 120 PHÚT CHINH PHỤC THANG 20 ĐIỂM

Khung giờ	Mục tiêu điểm số	Kĩ thuật xử lí trong phòng thi
Phút 00 – 05	Đọc lướt toàn đề	Đọc cả 5 bài, gạch chân từ khóa ($n \in \mathbb{N}$ hay $\mathbb{Z}$, số nguyên tố, chia trường hợp trên đường thẳng), xếp thứ tự làm từ dễ đến khó.
Phút 05 – 55	Ăn chắc **11 – 13 điểm**	Xử lí trọn vẹn Bài 1 (tính hợp lí / dãy quy luật), Bài 2 (tìm x / chia hết) và các ý đầu của Bài 3, Bài 4. Trình bày sạch, ghi rõ điều kiện để không mất 0,25đ vặt.
Phút 55 – 95	Bứt phá **16 – 18 điểm**	Tập trung cao độ giải quyết ý khó Số học (Bài 3) và ý phân loại Hình học / Đếm hình (Bài 4). Kiểm tra ngược đáp số bằng thử giá trị nhỏ.
Phút 95 – 115	Chốt **Giải Nhất (18–20đ)**	Tấn công Bài 5 (Bất đẳng thức, Dirichlet, Tổ hợp, Nghiệm nguyên). Dù chưa ra trọn vẹn vẫn viết rõ các bổ đề / đánh giá trung gian để ghi điểm thành phần!
Phút 115 – 120	Soát lỗi sống còn	Kiểm tra lại điều kiện xác định, kết luận "Vậy...", đơn vị đo hình học, và thử lại nghiệm của phương trình tìm x, y.

MỤC LỤC 30 ĐỀ THI HSG TOÁN 6 (THANG 20 ĐIỂM • 120 PHÚT)

Mã đề	Nguồn tham khảo & Trọng tâm kiến thức	Trang Đề	Trang Giải
CHẶNG 1. ĐỀ THI HSG CẤP TRƯỜNG & CÂU LẠC BỘ TOÁN 6 (ĐỀ 01 – 10)			
Đề số 01	Tuyển chọn & chuẩn hóa từ Đề kiểm tra chọn đội tuyển HSG Toán 6 năm học 2026–2027, Trường THCS Chu Văn An (Phường Phan Đình Phùng, Thái Nguyên) **[Mẫu đọc thử]** Tính thuận tiện & Tìm x • Quy luật dãy số • Đếm chia hết cho 3 & Thực tế	6	8
Đề số 02	Tuyển chọn & chuẩn hóa từ Đề chọn đội tuyển HSG Toán 6 năm học 2026–2027, Trường THCS Nguyễn Du (Thanh Hóa) Tập hợp & Dãy phân số • Tìm x & Toán chuyển động • Phép chia có dư & Tổ hợp leo bậc	—	—
Đề số 03	Tuyển chọn & chuẩn hóa từ Đề giao lưu HSG Toán 6 cấp xã năm học 2025–2026, UBND Xã Bá Thước (Thanh Hóa) Phân số & Dãy quy luật • Chia hết, BCNN & Phân số tối giản • Số nguyên tố, Nghiệm nguyên & Xác suất thực nghiệm	—	—
Đề số 04	Tuyển chọn & chuẩn hóa từ Đề thi chọn HSG Toán 6 cấp xã năm học 2025–2026, UBND Xã Nga An (Thanh Hóa) Lũy thừa & Dãy phân số khử liên tiếp • Tìm x & So sánh lũy thừa • Ứng dụng BCNN & Số chính phương	—	—
Đề số 05	Tuyển chọn & chuẩn hóa từ Đề giao lưu HSG Toán 6 cấp xã năm học 2025–2026, UBND Xã Hoa Lộc (Thanh Hóa) Rút gọn lũy thừa & So sánh dãy phân số • Tìm x & ƯCLN–BCNN • Nghiệm nguyên & Số nguyên tố	—	—
Đề số 06	Tuyển chọn & chuẩn hóa từ Đề giao lưu HSG các Câu lạc bộ lớp 6 cấp Xã, năm học 2025 – 2026 (Xã Quảng Ngọc, tỉnh Thanh Hóa) Tính hợp lý & Dãy phân số quy luật • Xác suất thực nghiệm (GDPT 2018) • ƯCLN thực tế, Phân số tối giản & Giai thừa	—	—
Đề số 07	Tuyển chọn & chuẩn hóa từ Đề khảo sát chất lượng HSG Toán 6 đợt 1, năm học 2025 – 2026 (Cụm trường THCS Lâm – Văn – Kiều, tỉnh Nghệ An) Tính hợp lý phân số & Rút gọn lũy thừa • Tìm x & Dấu hiệu chia hết • Tổng lũy thừa, BCNN & Phương trình nghiệm nguyên	—	—
Đề số 08	Tuyển chọn & chuẩn hóa từ Đề khảo sát đội dự tuyển HSG Toán 6, năm học 2025 – 2026 (Trường THCS Thị trấn Bến Sung, xã Như Thanh, tỉnh Thanh Hóa) Tổng lũy thừa cơ số 2 & Dãy phân số hiệu tăng dần • Toán thực tế kinh doanh lãi – lỗ (GDPT 2018) • Phương trình nghiệm nguyên & Chia hết cho 49	—	—
Đề số 09	Tuyển chọn & chuẩn hóa từ Đề kiểm định chất lượng HSG Toán 6, năm học 2025 – 2026 (Trường THCS Hợp Thành, tỉnh Thanh Hóa) Dãy phân số, Tổng lũy thừa & Phương trình bậc ba • ƯCLN phân số & BCNN học sinh xếp hàng • Số nguyên tố theo mô-đun 7 & Chia hết cho 12	—	—
Đề số 10	Tuyển chọn & chuẩn hóa từ Đề thi Giao lưu Olympic Toán 6, năm học 2025 – 2026 (Cụm trường THCS Hà Nội) Tổng dãy tích $k(k+5)$ & Tính hợp lý • Tìm số có 5 chữ số theo điều kiện chia dư & Số chính phương • Số nguyên tố & Xác suất thực nghiệm kết hợp BCNN	—	—
CHẶNG 2. ĐỀ THI HSG CẤP QUẬN / HUYỆN CHUẨN (ĐỀ 11 – 20)			
Đề số 11	Phòng GD&ĐT huyện Tiền Hải, tỉnh Thái Bình — Kỳ thi chọn HSG cấp huyện năm học 2024–2025 **[Mẫu đọc thử]** Tính giá trị biểu thức & So sánh lũy thừa • Dấu hiệu chia hết & Số chính phương • Xác suất thực nghiệm & BCNN	13	15
Đề số 12	Phòng GD&ĐT thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương — Đề giao lưu HSG lớp 6 năm học 2024–2025 (chuẩn hóa thang điểm 20)	—	—

Mã đề	Nguồn tham khảo & Trọng tâm kiến thức	Trang Đề	Trang Giải
	Tính hợp lý & Dãy phân số quy luật • Tìm x lũy thừa & Nghiệm nguyên • Chia hết, Phép chia có dư & Số nguyên tố		
Đề số 13	Phòng GD&ĐT huyện Thiệu Hóa, tỉnh Thanh Hóa — Kỳ thi giao lưu HSG cấp huyện năm học 2024–2025 (ngày 03/04/2025) Biểu thức lũy thừa & Tổng cấp số nhân • Tìm số theo số dư & Phương trình chính phương • Xác suất thực nghiệm nâng cao & Toán phân số	—	—
Đề số 14	UBND xã Phúc Lộc, tỉnh Nghệ An — Kỳ thi chọn HSG Toán 6 năm học 2025–2026 (tuyển chọn & chuẩn hóa chuẩn cấp Huyện) Rút gọn lũy thừa & Dãy phân số tam giác • Tìm x lũy thừa & Tổng dãy số chẵn • Bài toán thực tế ƯCLN & Cặp số tự nhiên	—	—
Đề số 15	UBND phường Nam Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hóa — Kỳ thi chọn HSG Toán 6 năm học 2025–2026 (chuẩn hóa thang điểm 20) Rút gọn lũy thừa & Dãy tích – tổng quy luật • Tìm x & Phương trình nghiệm nguyên hai ẩn • Bài toán thực tế Tết 2026 (Phân số & ƯCLN)	—	—
Đề số 16	Đề thi Học sinh giỏi Toán 6 cấp Huyện năm 2024–2025, Phòng GD&ĐT Gia Bình (Bắc Ninh) Tính hợp lí & Tổng dãy phân số • Chia hết & Phương trình nghiệm nguyên • Toán phân số thực tế & Số nguyên tố	—	—
Đề số 17	Đề kiểm định chất lượng Học sinh giỏi Toán 6 cấp Huyện năm 2024–2025, Phòng GD&ĐT Triệu Sơn (Thanh Hóa) Thứ tự phép tính & Tích rút gọn • Tìm x, ƯCLN phân số & Toán thực tế • Phương trình phân số, Giai thừa & Chia hết	—	—
Đề số 18	Đề khảo sát chọn Học sinh giỏi Toán 6 cấp Huyện năm 2024–2025, Phòng GD&ĐT Ninh Giang (Hải Dương) Rút gọn phân số lũy thừa bậc lớn • Tìm x tạo tử chung & Chữ số tận cùng • Phương trình nghiệm nguyên, BCNN & Số nguyên tố	—	—
Đề số 19	Đề khảo sát chọn nguồn Học sinh giỏi Toán 6 vòng 5 năm 2024–2025, Phòng GD&ĐT Đông Hưng (Thái Bình) Tính hợp lí & Tích phân số quy luật • Chia hết cho 45 & Tìm x chứa tổng dãy • Số chính phương, Số nguyên tố & So sánh tổng	—	—
Đề số 20	Đề thi giao lưu Học sinh giỏi Toán 6 năm 2023–2024, Cụm chuyên môn số 3 — Phòng GD&ĐT Nga Sơn (Thanh Hóa) Tổng lũy thừa & Tổng dãy tích quy luật • Tìm số nguyên x nhiều dạng & Bẫy vô nghiệm • Số dư chia hết, Nghiệm nguyên & Số chính phương	—	—
CHẶNG 3. ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN & GIAO LƯU HSG CHẤT LƯỢNG CAO (ĐỀ 21 – 30)			
Đề số 21	Phòng GD&ĐT Thành phố Thanh Hóa — Kì giao lưu Học sinh giỏi Toán 6 cấp Thành phố năm học 2023–2024 (tuyển chọn & chuẩn hóa) **[Mẫu đọc thử]** Tỉ số dãy phân số quy luật • Phương trình lũy thừa & nghiệm nguyên • Số nguyên tố & chứng minh hợp số	**20**	**22**
Đề số 22	Phòng GD&ĐT huyện Lâm Thao (Phú Thọ) — Kỳ thi chọn Học sinh giỏi Toán 6 cấp Huyện năm học 2023–2024 (tuyển chọn & chuẩn hóa) Rút gọn lũy thừa & tích phân số • ƯCLN–BCNN tham số & xác suất thực nghiệm • Phân số tối giản & cực trị nguyên	—	—
Đề số 23	Phòng GD&ĐT huyện Lương Tài (Bắc Ninh) — Kỳ thi chọn Học sinh giỏi Toán 6 cấp Huyện (Bảng A) năm học 2023–2024 (tuyển chọn & chuẩn hóa) Tính hợp lí dãy phân số • Phương trình phân số & biểu thức đối xứng • Chia hết lũy thừa & số chính phương	—	—
Đề số 24	Phòng GD&ĐT huyện Tiền Hải (Thái Bình) — Kỳ khảo sát Học sinh giỏi Toán 6 cấp Huyện năm học 2023–2024 (tuyển chọn & chuẩn hóa)	—	—

Mã đề	Nguồn tham khảo & Trọng tâm kiến thức	Trang Đề	Trang Giải
	Tổng dãy số lẻ & lũy thừa cơ số 2 • Số nguyên tố, chia hết & phân số tối giản • Phương trình nghiệm nguyên & bài toán BCNN		
Đề số 25	Phòng GD&ĐT huyện Thiệu Hóa (Thanh Hóa) — Đề thi giao lưu Học sinh giỏi Toán 6 cấp Huyện năm học 2023–2024 (tuyển chọn & chuẩn hóa) Tổng phân số quy luật & rút gọn lũy thừa • Hệ chia có dư & phương trình nghiệm nguyên • Số nguyên tố & bài toán chia hết 24 của số chính phương	—	—
Đề số 26	Phòng GD&ĐT Thanh Thủy (Phú Thọ) — Đề thi chọn Học sinh năng khiếu Toán 6 năm học 2023–2024 (tuyển chọn & chuẩn hóa tự luận) Tổng lũy thừa & chia hết 4, 7 • Rút gọn lũy thừa & ƯCLN–BCNN • So sánh tổng phân số & xác suất	—	—
Đề số 27	Trường THCS Trần Mai Ninh (TP Thanh Hóa) — Đề thi HSG Toán 6 Vòng I năm học 2023–2024 (chuẩn hóa 5 bài tự luận) Tích phân số rút gọn & đếm chữ số • Bất đẳng thức phân số & lũy thừa cơ số 2 • Phân số tối giản & cặp số nguyên tố	—	—
Đề số 28	Trường THCS Trần Mai Ninh (TP Thanh Hóa) — Đề thi HSG Toán 6 Vòng II (chọn đội tuyển) năm học 2023–2024 Tính hợp lí & so sánh lũy thừa trung gian • Tổng sai phân & chia hết cho 13 • ƯCLN–BCNN & xác suất hộp bóng	—	—
Đề số 29	Phòng GD&ĐT Ninh Giang (Hải Dương) — Đề khảo sát năng lực HSG Toán 6 năm học 2023–2024 (tuyển chọn Đợt 1 & Đợt 2) Phân số & lũy thừa rút gọn • Phương trình tổng phân số quy luật • Nghiệm nguyên, phép chia dư & bài toán 5 giỏ quả	—	—
Đề số 30	Phòng GD&ĐT Yên Mô (Ninh Bình) — Đề khảo sát Học sinh giỏi Toán 6 năm học 2023–2024 Tổng tích liên tiếp & phương trình lũy thừa • Phép chia có dư, phân số nguyên & số nguyên tố • Dirichlet cơ bản, xác suất & phương trình tích	—	—

📌 VỀ BẢN ĐỌC THỬ MIỄN PHÍ

Bảng trên liệt kê đủ 30 đề của **bản đầy đủ (155 trang A4)**. Trong bản đọc thử này, thầy trích nguyên vẹn **3 đề đại diện 3 Chặng: Đề 01, Đề 11 và Đề 21** (đủ Đề thi + Chiến thuật + Hướng dẫn chấm chi tiết).

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 6 — ĐỀ SỐ 01

Chặng 1 • Cấp Trường / CLB

Nguồn tham khảo: Tuyển chọn & chuẩn hóa từ Đề kiểm tra chọn đội tuyển HSG Toán 6 năm học 2026–2027, Trường THCS Chu Văn An (Phường Phan Đình Phùng, Thái Nguyên)

Thời gian: 120 phút | **Thang điểm:** 20,0 điểm

Trọng tâm: Tính thuận tiện & Tìm x | Quy luật dãy số | Đếm chia hết cho 3 & Thực tế | Hình học trực quan & Diện tích | Liên phân số & Toán tuổi

Bài 1 (4,0 điểm). *[Tính giá trị biểu thức & Tìm x]*

a) Tính giá trị biểu thức sau bằng cách thuận tiện nhất:

$$A = 2026 : 4 + 20{,}26 \cdot 74 + 202{,}6 \cdot 10\%.$$

b) Tìm x biết:

$$x \cdot 4{,}9 + x \cdot 5{,}1 = 30.$$

Bài 2 (4,0 điểm). *[Quy luật số & Dãy số cách đều bậc hai]*

a) Cho bốn bộ ba số tuân theo cùng một quy luật tạo số có ba chữ số từ hai số có hai chữ số như sau:

$$(24;\ 34 \to 274),\quad (33;\ 46 \to 376),\quad (13;\ 35 \to 165),\quad (31;\ ? \to 364).$$

Hãy tìm số thích hợp thay cho dấu hỏi chấm $(?)$ và giải thích quy luật.

b) Cho dãy số: $7;\ 8;\ 10;\ 13;\ 17;\ \ldots$ Tìm số hạng thứ 50 của dãy.

Bài 3 (4,0 điểm). *[Tổ hợp đếm chia hết & Toán thực tế]*

a) Từ bốn chữ số $0;\ 1;\ 2;\ 3$, lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 3?

b) Một người thợ làm trong 2 ngày, mỗi ngày làm 8 giờ thì được 112 sản phẩm. Nếu người đó làm với cùng năng suất trong 7 ngày, mỗi ngày làm 9 giờ thì được bao nhiêu sản phẩm?

Bài 4 (4,0 điểm). *[Hình học trực quan & Tính diện tích]*

a) Một bể bơi dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 12 m, chiều rộng $8{,}5$ m và chiều cao 2 m. Người ta lát kín gạch men vào các mặt xung quanh và mặt đáy của bể bơi (không lát nắp, mạch vữa không đáng kể). Hỏi cần dùng hết bao nhiêu viên gạch hình vuông có cạnh 5 cm?

b) Cho hình vuông lớn $AECF$ cạnh 5 cm (các đỉnh theo thứ tự A, E, C, F). Đặt kề bên ngoài hình vuông lớn hai hình vuông nhỏ cạnh 3 cm sao cho cả ba hình vuông cùng chung đỉnh C: đỉnh B nằm trên tia đối của tia CF với $CB = 3$ cm (cạnh của hình vuông nhỏ thứ nhất đặt kề bên phải cạnh EC) và đỉnh D nằm trên tia đối của tia CE với $CD = 3$ cm (cạnh của hình vuông nhỏ thứ hai đặt kề bên dưới cạnh FC). Tính diện tích tam giác ABD.

Bài 5 (4,0 điểm). *[Liên phân số & Toán tư duy tính tuổi]*

a) Cho năm số nguyên dương a, b, c, d, e thỏa mãn:

$$\frac{487}{340} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e}}}}.$$

Tính tổng $S = a + b + c + d + e$.

b) Tổng số tuổi hiện nay của ông, bố và 2 anh em là 110 tuổi. Sau 4 năm nữa, tuổi ông gấp đôi tuổi bố và tuổi bố gấp đôi tổng số tuổi của 2 anh em. Hỏi hiện nay bố bao nhiêu tuổi?

——— HẾT ĐỀ SỐ 01 ———

HƯỚNG DẪN CHẤM & LỜI GIẢI CHI TIẾT — ĐỀ SỐ 01

CHIẾN THUẬT PHÒNG THI 120 PHÚT — ĐỀ SỐ 01

Đề khởi động chuẩn đội tuyển cấp trường: nên xử lý trọn vẹn Bài 1, Bài 2 và Bài 3 trong 45 phút đầu để chắc chắn 12 điểm nền. Ở Bài 4 chú ý đổi đơn vị diện tích từ m^2 sang cm^2 ($1\ \text{m}^2 = 10\,000\ \text{cm}^2$) và vẽ đúng vị trí ba hình vuông chung đỉnh C; ở Bài 5b tránh nhầm số người tăng tuổi (gồm 4 người: ông, bố và 2 anh em).

Bài 1 — Tính giá trị biểu thức & Tìm x — 4,0 điểm

a) Biến đổi các số hạng để xuất hiện thừa số chung $20{,}26$:

- $2026 : 4 = 2026 \cdot 0{,}25 = 20{,}26 \cdot 25$;
- $202{,}6 \cdot 10\% = 202{,}6 \cdot 0{,}1 = 20{,}26 = 20{,}26 \cdot 1$.

Thay vào biểu thức A, ta được:

$$A = 20{,}26 \cdot 25 + 20{,}26 \cdot 74 + 20{,}26 \cdot 1 = 20{,}26 \cdot (25 + 74 + 1) = 20{,}26 \cdot 100 = 2026.$$

Vậy $A = 2026$.

b) Áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng:

$$x \cdot 4{,}9 + x \cdot 5{,}1 = 30$$
$$x \cdot (4{,}9 + 5{,}1) = 30$$
$$x \cdot 10 = 30$$
$$x = 30 : 10 = 3.$$

Vậy $x = 3$.

Lưu ý biểu điểm: Ý a) cần chỉ rõ bước đổi $2026 : 4 = 20{,}26 \cdot 25$ và $202{,}6 \cdot 10\% = 20{,}26 \cdot 1$ trước khi đặt thừa số chung; nhiều học sinh quên thừa số 1 nên cộng ra 99 thay vì 100 (mất 0,5đ).

Bài 2 — Quy luật số & Dãy số cách đều bậc hai — 4,0 điểm

a) Xét quy luật tạo số có ba chữ số từ hai số có hai chữ số $\overline{mn}$ và $\overline{pq}$ ở ba bộ đầu tiên:

- Bộ 1: $(24;\ 34 \to 274)$ có chữ số hàng trăm là 2, chữ số hàng đơn vị là 4, chữ số hàng chục là $4 + 3 = 7$.
- Bộ 2: $(33;\ 46 \to 376)$ có chữ số hàng trăm là 3, chữ số hàng đơn vị là 6, chữ số hàng chục là $3 + 4 = 7$.
- Bộ 3: $(13;\ 35 \to 165)$ có chữ số hàng trăm là 1, chữ số hàng đơn vị là 5, chữ số hàng chục là $3 + 3 = 6$.

Quy luật: Chữ số hàng trăm là chữ số hàng chục của số thứ nhất; chữ số hàng đơn vị là chữ số hàng đơn vị của số thứ hai; chữ số hàng chục ở giữa bằng tổng chữ số hàng đơn vị của số thứ nhất và chữ số hàng chục của số thứ hai.

Áp dụng cho bộ thứ tư $(31;\ \overline{ab} \to 364)$:

- Chữ số hàng chục của số cần tìm thỏa mãn $1 + a = 6 \Rightarrow a = 5$.
- Chữ số hàng đơn vị của số cần tìm là $b = 4$.

Vậy số cần điền vào dấu ? là 54.

b) Gọi u_n là số hạng thứ n của dãy ($n \in \mathbb{N}^*$). Quan sát quy luật hiệu giữa hai số hạng liên tiếp:

- $u_1 = 7$;
- $u_2 = 8 = 7 + 1$;
- $u_3 = 10 = 7 + 1 + 2$;

- $u_4 = 13 = 7 + 1 + 2 + 3$;
- $u_5 = 17 = 7 + 1 + 2 + 3 + 4$.

Tổng quát, số hạng thứ n bằng 7 cộng với tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến $n-1$. Do đó số hạng thứ 50 của dãy là:

$$u_{50} = 7 + (1 + 2 + 3 + \cdots + 49).$$

Tính tổng $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 49$ (gồm 49 số hạng):

$$S = \frac{(1 + 49) \cdot 49}{2} = 25 \cdot 49 = 1225.$$

Suy ra:

$$u_{50} = 7 + 1225 = 1232.$$

Vậy số hạng thứ 50 của dãy là 1232.

🎯 **Lưu ý biểu điểm:** Ở ý b), lỗi sai kinh điển là cộng đến 50 thay vì 49 (do nhầm số khoảng cách giữa 50 số hạng là 50); luôn kiểm tra ngược công thức $u_n = 7 + \dfrac{(n-1)n}{2}$ với $n = 4, 5$ để tránh mất 0,5đ.

Bài 3 — Tổ hợp đếm chia hết & Toán thực tế — 4,0 điểm

a) Một số chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng các chữ số của nó chia hết cho 3.

Tổng của cả bốn chữ số đã cho là $0 + 1 + 2 + 3 = 6 \vdots 3$. Để chọn 3 chữ số có tổng chia hết cho 3, chữ số bị loại cũng phải chia hết cho 3, tức là loại chữ số 0 hoặc chữ số 3.

- **Trường hợp 1:** Chọn bộ ba chữ số $\{1;\ 2;\ 3\}$ (tổng bằng $6 \vdots 3$).
- Hàng trăm có 3 cách chọn;
- Hàng chục có 2 cách chọn;
- Hàng đơn vị có 1 cách chọn.

Số các số lập được là: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (số).

- **Trường hợp 2:** Chọn bộ ba chữ số $\{0;\ 1;\ 2\}$ (tổng bằng $3 \vdots 3$).
- Hàng trăm phải khác 0 nên có 2 cách chọn (1 hoặc 2);
- Hàng chục có 2 cách chọn (chữ số 0 và chữ số còn lại);
- Hàng đơn vị có 1 cách chọn.

Số các số lập được là: $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ (số).

Tổng số các số thỏa mãn yêu cầu là:

$$6 + 4 = 10 \text{ (số)}.$$

b) Tổng số giờ người thợ làm trong đợt đầu là:

$$2 \cdot 8 = 16 \text{ (giờ)}.$$

Năng suất mỗi giờ của người thợ là:

$$112 : 16 = 7 \text{ (sản phẩm/giờ)}.$$

Tổng số giờ người thợ làm trong đợt sau là:

$$7 \cdot 9 = 63 \text{ (giờ)}.$$

Số sản phẩm người đó làm được là:

$$63 \cdot 7 = 441 \text{ (sản phẩm)}.$$

Vậy người thợ làm được 441 sản phẩm.

> 🎯 **Lưu ý biểu điểm:** Ở ý a), học sinh rất dễ đếm nhầm chữ số 0 ở hàng trăm trong trường hợp $\{0;1;2\}$ dẫn đến kết quả 12 số thay vì 10 số; cần nêu rõ điều kiện chữ số hàng trăm khác 0 để giữ trọn 2,0đ.

Bài 4 — Hình học trực quan & Tính diện tích — 4,0 điểm

a) Chu vi đáy của bể bơi hình hộp chữ nhật là:

$$2 \cdot (12 + 8{,}5) = 41 \text{ (m)}.$$

Diện tích xung quanh của bể bơi là:

$$S_{\text{xq}} = 41 \cdot 2 = 82 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Diện tích đáy của bể bơi là:

$$S_{\text{đáy}} = 12 \cdot 8{,}5 = 102 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Tổng diện tích cần lát gạch là:

$$S = 82 + 102 = 184 \text{ (m}^2\text{)} = 1\,840\,000 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích một viên gạch hình vuông cạnh 5 cm là:

$$5 \cdot 5 = 25 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Do các kích thước của bể $(1200$ cm, 850 cm, 200 cm$)$ đều chia hết cho 5 cm nên các viên gạch lát vừa khít. Số viên gạch cần dùng là:

$$1\,840\,000 : 25 = 73\,600 \text{ (viên)}.$$

b) Do $AECF$ là hình vuông cạnh 5 cm nên $AF = AE = EC = CF = 5$ cm và $AF \perp FC$, $AE \perp EC$, $EC \perp FC$.

Vì B thuộc tia đối của tia CF và D thuộc tia đối của tia CE nên C nằm trong tam giác ABD, chia $\triangle ABD$ thành ba tam giác nhỏ không chồng lấn: $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ và $\triangle BCD$.

- Xét $\triangle ABC$: đáy $BC = 3$ cm nằm trên đường thẳng FC; đường cao hạ từ A xuống đường thẳng BC chính là $AF = 5$ cm. Do đó:
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AF = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7{,}5 \text{ (cm}^2\text{)}.$$
- Xét $\triangle ADC$: đáy $CD = 3$ cm nằm trên đường thẳng EC; đường cao hạ từ A xuống đường thẳng CD chính là $AE = 5$ cm. Do đó:
$$S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AE = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7{,}5 \text{ (cm}^2\text{)}.$$
- Xét $\triangle BCD$: vì $EC \perp FC$ nên $CB \perp CD$, suy ra $\triangle BCD$ vuông tại C với $CB = CD = 3$ cm. Do đó:
$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot CD = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4{,}5 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích tam giác ABD là:

$$S_{ABD} = S_{ABC} + S_{ADC} + S_{BCD} = 7{,}5 + 7{,}5 + 4{,}5 = 19{,}5 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

> 🎯 **Lưu ý biểu điểm:** Ở ý a), lỗi phổ biến nhất là đổi 184 m$^2 = 18\,400$ cm^2 (thiếu 2 chữ số 0, mất 0,5đ) hoặc nhân đôi diện tích đáy. Ở ý b), chỉ rõ đường cao hạ từ A xuống các đường thẳng BC, CD bằng cạnh hình vuông lớn 5 cm là chìa khóa ăn trọn điểm.

Bài 5 — Liên phân số & Toán tư duy tính tuổi **4,0 điểm**

a) Vì $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}^*$ nên mỗi phân số nghịch đảo liên tiếp phía sau đều lớn hơn 0 và nhỏ hơn 1 (riêng $d + \dfrac{1}{e}$ không nguyên nên $e \geq 2$ và $0 < \dfrac{1}{e} < 1$). Ta dùng phép chia có dư liên tiếp (thuật toán Euclid) để tách phần nguyên duy nhất ở từng bước:

- Chia 487 cho 340 được thương 1, dư 147:
$$\frac{487}{340} = 1 + \frac{147}{340} = 1 + \frac{1}{\dfrac{340}{147}} \Rightarrow a = 1.$$
- Chia 340 cho 147 được thương 2, dư 46:
$$\frac{340}{147} = 2 + \frac{46}{147} = 2 + \frac{1}{\dfrac{147}{46}} \Rightarrow b = 2.$$
- Chia 147 cho 46 được thương 3, dư 9:
$$\frac{147}{46} = 3 + \frac{9}{46} = 3 + \frac{1}{\dfrac{46}{9}} \Rightarrow c = 3.$$
- Chia 46 cho 9 được thương 5, dư 1:
$$\frac{46}{9} = 5 + \frac{1}{9} \Rightarrow d = 5,\ e = 9.$$

Vậy $a = 1, b = 2, c = 3, d = 5, e = 9$, suy ra:

$$S = a + b + c + d + e = 1 + 2 + 3 + 5 + 9 = 20.$$

b) Trong gia đình có tất cả 4 người gồm: ông, bố và 2 anh em.

Sau 4 năm nữa, mỗi người đều tăng thêm 4 tuổi nên tổng số tuổi của cả 4 người tăng thêm:

$$4 \cdot 4 = 16 \text{ (tuổi)}.$$

Tổng số tuổi của cả 4 người sau 4 năm nữa là:

$$110 + 16 = 126 \text{ (tuổi)}.$$

Tại thời điểm 4 năm sau:

- Coi tổng số tuổi của 2 anh em là 1 phần;
- Tuổi bố gấp đôi tổng tuổi 2 anh em nên tuổi bố là 2 phần;
- Tuổi ông gấp đôi tuổi bố nên tuổi ông là $2 \cdot 2 = 4$ phần.

Tổng số phần bằng nhau là:

$$1 + 2 + 4 = 7 \text{ (phần)}.$$

Giá trị của 1 phần (tổng tuổi 2 anh em sau 4 năm) là:

$$126 : 7 = 18 \text{ (tuổi)}.$$

Tuổi của bố sau 4 năm nữa là:

$$18 \cdot 2 = 36 \text{ (tuổi)}.$$

Vậy tuổi của bố hiện nay là:

$$36 - 4 = 32 \text{ (tuổi)}.$$

🎯 **Lưu ý biểu điểm:** Ở ý a), cần giải thích rõ vì sao phần nguyên tách ra ở mỗi bước là duy nhất ($0 < \text{phần dư} < 1$). Ở ý b), bẫy kinh điển là tính tổng tuổi tăng thêm bằng $3 \cdot 4 = 12$ thay vì $4 \cdot 4 = 16$ hoặc quên trừ 4 tuổi để quay về hiện tại.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 6 — ĐỀ SỐ 11

Chặng 2 • Cấp Quận / Huyện

Nguồn tham khảo: Phòng GD&ĐT huyện Tiền Hải, tỉnh Thái Bình — Kỳ thi chọn HSG cấp huyện năm học 2024–2025

Thời gian: 120 phút | **Thang điểm:** 20,0 điểm

Trọng tâm: Tính giá trị biểu thức & So sánh lũy thừa | Dấu hiệu chia hết & Số chính phương | Xác suất thực nghiệm & BCNN | Trung điểm đoạn thẳng & Hình học thực tế | Chứng minh hợp số nâng cao

Bài 1 (4,5 điểm). *[Tính giá trị biểu thức và so sánh phân số chứa lũy thừa]*

1) Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \left(2^{15} + 15^2\right) \cdot \left(2^4 - 4^2\right)$.

b) $B = \left(1 + \dfrac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{15}\right) \cdots \left(1 + \dfrac{1}{99}\right)$.

2) So sánh C và D, biết:

$$C = \frac{2025}{50^{10}} + \frac{2025}{50^8} \quad \text{và} \quad D = \frac{2026}{50^{10}} + \frac{2024}{50^8}.$$

Bài 2 (4,5 điểm). *[Dấu hiệu chia hết, tổng phân số quy luật và số chính phương]*

1) Tìm các chữ số x, y sao cho số $\overline{34x5y}$ chia hết cho 36.

2) Tìm x biết:

$$\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99\cdot 100}\right) \cdot x^2 = 99.$$

3) Tìm số tự nhiên n có hai chữ số, biết $2n + 1$ và $3n + 1$ đều là các số chính phương.

Bài 3 (3,0 điểm). *[Xác suất thực nghiệm và bài toán thực tế về BCNN]*

1) Bạn Nam gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối 50 lần. Ở mỗi lần gieo, Nam cộng số chấm xuất hiện ở hai con xúc xắc và ghi lại kết quả thống kê như sau: tổng bằng 2 xuất hiện 2 lần; tổng bằng 3 xuất hiện 5 lần; tổng bằng 4 xuất hiện 4 lần; tổng bằng 5 xuất hiện 7 lần; tổng bằng 6 xuất hiện 8 lần; tổng bằng 7 xuất hiện 7 lần; tổng bằng 8 xuất hiện 5 lần; tổng bằng 9 xuất hiện 4 lần; tổng bằng 10 xuất hiện 3 lần; tổng bằng 11 xuất hiện 3 lần; tổng bằng 12 xuất hiện 2 lần. Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện xuất hiện tổng số chấm ở hai con xúc xắc không nhỏ hơn 9.

2) Số học sinh của một trường THCS là một số tự nhiên có ba chữ số lớn hơn 800. Khi xếp hàng 20 thì dư 9 em; khi xếp hàng 30 thì thiếu 21 em và khi xếp hàng 35 thì thiếu 26 em. Hỏi trường đó có tất cả bao nhiêu học sinh?

Bài 4 (6,0 điểm). *[Đoạn thẳng, trung điểm, đếm đoạn thẳng và hình học thực tế]*

1) Trên đường thẳng xy lấy bốn điểm A, B, C, D sao cho $AB = 10$ cm, điểm C là trung điểm của đoạn thẳng AB và điểm D là trung điểm của đoạn thẳng CB.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AD.

b) Lấy thêm n điểm phân biệt ($n \in \mathbb{N}^*$) trên đường thẳng xy không trùng với bốn điểm A, B, C, D. Cứ qua hai điểm phân biệt trên đường thẳng xy vẽ được một đoạn thẳng và đếm được tất cả 136 đoạn thẳng. Hỏi đã lấy thêm bao nhiêu điểm phân biệt trên đường thẳng xy?

2) Một khu đất hình chữ nhật có chu vi là 138 m. Nếu giảm chiều rộng đi 5 m và tăng chiều dài thêm 5 m thì chiều dài mới gấp đôi chiều rộng mới. Người ta dùng 50% diện tích khu đất để trồng rau, $\dfrac{5}{14}$ diện tích khu đất để trồng cây ăn quả, phần diện tích còn lại để xây nhà. Hỏi diện tích đất xây nhà là bao nhiêu mét vuông?

Bài 5 (2,0 điểm). *[Chứng minh số tự nhiên là hợp số bằng phân tích nhân tử]*

Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $ab = cd$. Chứng minh rằng:

$$M = a^{2025} + b^{2025} + c^{2025} + d^{2025}$$

là hợp số.

——— HẾT ĐỀ SỐ 11 ———

HƯỚNG DẪN CHẤM & LỜI GIẢI CHI TIẾT — ĐỀ SỐ 11

CHIẾN THUẬT PHÒNG THI 120 PHÚT — ĐỀ SỐ 11

Đề chuẩn cấu trúc huyện trọng điểm vùng đồng bằng sông Hồng: mở đầu nhẹ nhàng với Câu 1a có nhân tử bằng 0 và Câu 3.1 xác suất thực nghiệm giúp lấy nhanh 8 điểm trong 30 phút đầu. Cần đặc biệt cẩn thận hai bẫy mất điểm phổ biến: (1) ở Bài 2.2 dễ bỏ sót nghiệm âm $x=-10$ khi giải $x^2=100$; (2) ở Bài 5 phải chứng minh chặt chẽ M không thể chia hết cho $(a^{2025}+c^{2025})$ hay $(a^{2025}+d^{2025})$ nhờ chặn $0<a^{2025}+c^{2025}<M$. Phân bổ thời gian gợi ý: Bài 1 (15 phút), Bài 2 (25 phút), Bài 3 (20 phút), Bài 4 (35 phút), Bài 5 (20 phút), soát bài (5 phút).

Bài 1 — Tính giá trị biểu thức và so sánh phân số chứa lũy thừa — 4,5 điểm

1) Tính giá trị các biểu thức:

a) Ta có $2^4=16$ và $4^2=16$, suy ra $2^4-4^2=16-16=0$.

Do đó:

$$A=\left(2^{15}+15^2\right)\cdot 0=0.$$

Vậy $A=0$.

b) Đưa từng thừa số về dạng phân số rồi phân tích tử và mẫu thành tích:

$$B=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15}\cdots\frac{100}{99}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{10\cdot 10}{9\cdot 11}.$$

Nhóm các thừa số ở tử và mẫu theo quy luật:

$$B=\frac{(2\cdot 3\cdot 4\cdots 10)\cdot(2\cdot 3\cdot 4\cdots 10)}{(1\cdot 2\cdot 3\cdots 9)\cdot(3\cdot 4\cdot 5\cdots 11)}=\frac{10\cdot 2}{1\cdot 11}=\frac{20}{11}.$$

Vậy $B=\dfrac{20}{11}$.

2) So sánh C và D:

Tách phần chung $\dfrac{2025}{50^{10}}+\dfrac{2024}{50^8}$ ở cả hai biểu thức:

$$C=\frac{2025}{50^{10}}+\frac{2025}{50^8}=\frac{2025}{50^{10}}+\frac{2024}{50^8}+\frac{1}{50^8},$$

$$D=\frac{2026}{50^{10}}+\frac{2024}{50^8}=\frac{2025}{50^{10}}+\frac{2024}{50^8}+\frac{1}{50^{10}}.$$

Vì $50^8<50^{10}$ nên $\dfrac{1}{50^8}>\dfrac{1}{50^{10}}$.

Cộng cả hai vế với $\dfrac{2025}{50^{10}}+\dfrac{2024}{50^8}$, ta được $C>D$.

Vậy $C>D$.

Lưu ý biểu điểm: Ý 1a ($1{,}5$ đ): nhận ra $2^4-4^2=0$ ngay, không cần tính 2^{15}. Ý 1b ($1{,}5$ đ): tách mẫu $3=1\cdot 3$, $8=2\cdot 4$, ..., $99=9\cdot 11$; cần viết rõ nhóm hai tích để tránh rút gọn nhầm thừa số đầu/cuối. Ý 2 ($1{,}5$ đ): tách phần giống nhau ở C và D rồi so sánh phần dư, tránh quy đồng mẫu số cồng kềnh.

Bài 2 — Dấu hiệu chia hết, tổng phân số quy luật và số chính phương — 4,5 điểm

1) Tìm các chữ số x, y để $\overline{34x5y}\vdots 36$:

Điều kiện: $x,y\in\{0;1;2;\ldots;9\}$.

Ta có $36 = 4 \cdot 9$ và $\text{ƯCLN}(4, 9) = 1$, nên $\overline{34x5y} \vdots 36$ khi và chỉ khi $\overline{34x5y} \vdots 4$ và $\overline{34x5y} \vdots 9$.

- Để $\overline{34x5y} \vdots 4$ thì số tạo bởi hai chữ số tận cùng $\overline{5y}$ chia hết cho 4, suy ra $y \in \{2; 6\}$.
- Xét từng trường hợp của y kết hợp điều kiện chia hết cho 9:

- **Trường hợp 1:** $y = 2$. Khi đó $\overline{34x52} \vdots 9 \Leftrightarrow (3 + 4 + x + 5 + 2) \vdots 9 \Leftrightarrow (14 + x) \vdots 9$. Vì $0 \le x \le 9$ nên $x = 4$. Ta được cặp $(x; y) = (4; 2)$.

- **Trường hợp 2:** $y = 6$. Khi đó $\overline{34x56} \vdots 9 \Leftrightarrow (3 + 4 + x + 5 + 6) \vdots 9 \Leftrightarrow (18 + x) \vdots 9$. Vì $0 \le x \le 9$ nên $x \in \{0; 9\}$. Ta được hai cặp $(x; y) = (0; 6)$ và $(x; y) = (9; 6)$.

Vậy các cặp chữ số $(x; y)$ cần tìm là $(4; 2)$, $(0; 6)$ và $(9; 6)$.

2) Tìm x:

Sử dụng công thức tách $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, ta có:

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) \cdot x^2 = 99$$

$$\left(1 - \frac{1}{100}\right) \cdot x^2 = 99$$

$$\frac{99}{100} \cdot x^2 = 99$$

$$x^2 = 99 : \frac{99}{100} = 100.$$

Suy ra $x = 10$ hoặc $x = -10$.

Vậy $x \in \{10; -10\}$.

3) Tìm số tự nhiên n có hai chữ số:

Vì n là số tự nhiên có hai chữ số nên $10 \le n \le 99$, suy ra:

$$21 \le 2n + 1 \le 199.$$

Mặt khác $2n + 1$ là số chính phương lẻ, nên:

$$2n + 1 \in \{5^2; 7^2; 9^2; 11^2; 13^2\} = \{25; 49; 81; 121; 169\}.$$

Từ đó ta tìm được $n \in \{12; 24; 40; 60; 84\}$.

Thay lần lượt vào $3n + 1$:

- Với $n = 12$: $3n + 1 = 37$ (không là số chính phương, loại).
- Với $n = 24$: $3n + 1 = 73$ (không là số chính phương, loại).
- Với $n = 40$: $3n + 1 = 121 = 11^2$ (là số chính phương, thỏa mãn).
- Với $n = 60$: $3n + 1 = 181$ (không là số chính phương, loại).
- Với $n = 84$: $3n + 1 = 253$ (không là số chính phương, loại).

Vậy số tự nhiên cần tìm là $n = 40$.

🎯 **Lưu ý biểu điểm:** Mỗi ý $1{,}5$ điểm. Ý 1: phải nêu rõ $\text{ƯCLN}(4, 9) = 1$ trước khi tách điều kiện chia hết; thí sinh thường quên $x = 0$ khi $y = 6$. Ý 2: thiếu giá trị $x = -10$ bị trừ $0{,}25$ điểm. Ý 3: tận dụng nhận xét $2n + 1$ là số chính phương lẻ giúp rút gọn xuống chỉ còn 5 giá trị thử.

Bài 3 — Xác suất thực nghiệm và bài toán thực tế về BCNN 3,0 điểm

1) Tính xác suất thực nghiệm:

Tổng số chấm không nhỏ hơn 9 gồm các kết quả có tổng bằng $9, 10, 11$ hoặc 12.

Số lần Nam gieo được tổng số chấm không nhỏ hơn 9 là:

$$4 + 3 + 3 + 2 = 12 \text{ (lần)}.$$

Xác suất thực nghiệm của sự kiện xuất hiện tổng số chấm không nhỏ hơn 9 là:

$$\frac{12}{50} = \frac{6}{25} = 0{,}24 \text{ (hay } 24\%).$$

Vậy xác suất thực nghiệm cần tìm là $\dfrac{6}{25}$.

2) Tìm số học sinh của trường THCS:

Gọi số học sinh của trường đó là a (học sinh), điều kiện $a \in \mathbb{N}^*$ và $800 < a \leq 999$.

Theo đề bài ta có:

- Xếp hàng 20 dư 9 em nên $(a - 9) \vdots 20$.
- Xếp hàng 30 thiếu 21 em nên $(a + 21) \vdots 30 \Rightarrow (a + 21 - 30) \vdots 30 \Rightarrow (a - 9) \vdots 30$.
- Xếp hàng 35 thiếu 26 em nên $(a + 26) \vdots 35 \Rightarrow (a + 26 - 35) \vdots 35 \Rightarrow (a - 9) \vdots 35$.

Do đó $(a - 9) \in \text{BC}(20, 30, 35)$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố:

$$20 = 2^2 \cdot 5; \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5; \quad 35 = 5 \cdot 7.$$

Suy ra $\text{BCNN}(20, 30, 35) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

Khi đó:

$$a - 9 \in \text{B}(420) = \{0; 420; 840; 1260; \dots\} \Rightarrow a \in \{9; 429; 849; 1269; \dots\}.$$

Vì $800 < a \leq 999$ nên $a = 849$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy trường đó có tất cả 849 học sinh.

> 🎯 **Lưu ý biểu điểm:** Mỗi ý $1{,}5$ điểm. Ý 1: chú ý cụm từ 'không nhỏ hơn 9' nghĩa là lớn hơn HOẶC BẰNG 9 (phải tính cả tổng bằng 9), đồng thời nên rút gọn phân số đến tối giản $\dfrac{6}{25}$. Ý 2: quy đổi 'thiếu 21 khi chia 30' thành 'dư $30 - 21 = 9$' và đừng quên đặt điều kiện $a \in \mathbb{N}^*$, $800 < a \leq 999$.

Bài 4 — Đoạn thẳng, trung điểm, đếm đoạn thẳng và hình học thực tế 6,0 điểm

1) Bài toán đoạn thẳng trên đường thẳng xy:

a) Vì C là trung điểm của đoạn thẳng AB nên C nằm giữa hai điểm A, B và:

$$AC = CB = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ (cm)}.$$

Vì D là trung điểm của đoạn thẳng CB nên D nằm giữa hai điểm C, B và:

$$CD = DB = \frac{CB}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ (cm)}.$$

Vì C nằm giữa A, B và D nằm giữa C, B nên hai điểm A và D nằm khác phía đối với C (tức là C nằm giữa A và D). Suy ra:

$$AD = AC + CD = 5 + 2{,}5 = 7{,}5\ (\text{cm}).$$

Vậy $AD = 7{,}5$ cm.

b) Tổng số điểm phân biệt trên đường thẳng xy sau khi lấy thêm là $n+4$ điểm ($n \in \mathbb{N}^*$).

Chọn 1 điểm bất kì trong số $n+4$ điểm đó nối với $n+3$ điểm còn lại ta được $n+3$ đoạn thẳng. Làm như vậy với tất cả $n+4$ điểm thì được $(n+4)(n+3)$ đoạn thẳng, nhưng mỗi đoạn thẳng đã được tính 2 lần.

Do đó tổng số đoạn thẳng vẽ được là $\dfrac{(n+4)(n+3)}{2}$.

Theo đề bài ta có:

$$\frac{(n+4)(n+3)}{2} = 136 \Rightarrow (n+4)(n+3) = 272.$$

Vì $n+3$ và $n+4$ là hai số tự nhiên liên tiếp và $272 = 16 \cdot 17$ nên:

$$n+3 = 16 \Rightarrow n = 13\ (\text{thỏa mãn } n \in \mathbb{N}^*).$$

Vậy đã lấy thêm 13 điểm phân biệt trên đường thẳng xy.

2) Tính diện tích đất xây nhà:

Nửa chu vi khu đất hình chữ nhật ban đầu là:

$$138 : 2 = 69\ (\text{m}).$$

Khi giảm chiều rộng đi 5 m và tăng chiều dài thêm 5 m thì tổng chiều dài và chiều rộng (nửa chu vi) không đổi và vẫn bằng 69 m.

Lúc sau chiều dài gấp đôi chiều rộng nên chiều rộng lúc sau bằng $\dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3}$ nửa chu vi.

Chiều rộng khu đất lúc sau là: $69 \cdot \dfrac{1}{3} = 23\ (\text{m})$.

Chiều rộng khu đất ban đầu là: $23 + 5 = 28\ (\text{m})$.

Chiều dài khu đất ban đầu là: $69 - 28 = 41\ (\text{m})$.

Diện tích khu đất hình chữ nhật là: $28 \cdot 41 = 1148\ (\text{m}^2)$.

Đổi $50\% = \dfrac{1}{2}$. Phần diện tích dùng để xây nhà chiếm số phần diện tích khu đất là:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{5}{14} = \frac{14-7-5}{14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}\ (\text{diện tích khu đất}).$$

Diện tích đất xây nhà là:

$$1148 \cdot \frac{1}{7} = 164\ (\text{m}^2).$$

Vậy diện tích đất xây nhà là $164\ \text{m}^2$.

🎯 **Lưu ý biểu điểm:** Ý 1a (2,0 đ): nhớ giải thích rõ điểm C nằm giữa A và D trước khi cộng $AD = AC + CD$. Ý 1b (2,0 đ): phải giải thích vì sao chia 2 trong công thức đếm đoạn thẳng, không nên chỉ ghi kết quả. Ý 2 (2,0 đ): cần chỉ rõ nửa chu vi không đổi khi tăng dài 5 m và giảm rộng 5 m; tránh nhầm lẫn chiều rộng mới (23 m) với chiều rộng ban đầu (28 m).

Bài 5 — Chứng minh số tự nhiên là hợp số bằng phân tích nhân tử — 2,0 điểm

Vì a, b, c, d là các số nguyên dương nên $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 1$, suy ra $M \geq 1+1+1+1 = 4 > 1$.

Từ giả thiết $ab = cd$, lũy thừa bậc 2025 hai vế ta được:

$$a^{2025}\cdot b^{2025}=c^{2025}\cdot d^{2025}.$$

Nhân hai vế của đẳng thức $M=a^{2025}+b^{2025}+c^{2025}+d^{2025}$ với a^{2025}, ta có:

$$a^{2025}\cdot M=a^{2025}\cdot a^{2025}+a^{2025}\cdot b^{2025}+a^{2025}\cdot c^{2025}+a^{2025}\cdot d^{2025}$$

Thay $a^{2025}\cdot b^{2025}=c^{2025}\cdot d^{2025}$ vào biểu thức trên rồi nhóm hạng tử:

$$a^{2025}\cdot M=\left(a^{2025}\cdot a^{2025}+a^{2025}\cdot c^{2025}\right)+\left(c^{2025}\cdot d^{2025}+a^{2025}\cdot d^{2025}\right)$$

$$a^{2025}\cdot M=a^{2025}\left(a^{2025}+c^{2025}\right)+d^{2025}\left(a^{2025}+c^{2025}\right)$$

$$a^{2025}\cdot M=\left(a^{2025}+c^{2025}\right)\left(a^{2025}+d^{2025}\right).$$

Giả sử phản chứng M là số nguyên tố.

Từ đẳng thức trên suy ra $\left(a^{2025}+c^{2025}\right)\left(a^{2025}+d^{2025}\right)\vdots M.$

Vì M là số nguyên tố nên phải có ít nhất một trong hai thừa số chia hết cho M, tức là:

$$\left(a^{2025}+c^{2025}\right)\vdots M\quad\text{hoặc}\quad\left(a^{2025}+d^{2025}\right)\vdots M.$$

Tuy nhiên, do a,b,c,d là các số nguyên dương nên $b^{2025}+d^{2025}>0$ và $b^{2025}+c^{2025}>0$, dẫn đến:

$$0<a^{2025}+c^{2025}<M\quad\text{và}\quad 0<a^{2025}+d^{2025}<M.$$

Một số nguyên dương nhỏ hơn M không thể chia hết cho M (vô lí).

Do đó điều giả sử sai. Vì $M>1$ và M không phải số nguyên tố nên M là hợp số (điều phải chứng minh).

🎯 **Lưu ý biểu điểm:** Ý tưởng vàng: nhân M với a^{2025} để thay thế $a^{2025}b^{2025}=c^{2025}d^{2025}$ và phân tích thành tích $\left(a^{2025}+c^{2025}\right)\left(a^{2025}+d^{2025}\right)$ ($1{,}5$ đ). Phần phản chứng ($0{,}5$ đ) cần chỉ rõ hai điều kiện không thể thiếu: $M>1$ và $0<a^{2025}+c^{2025}<M, 0<a^{2025}+d^{2025}<M$.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 6 — ĐỀ SỐ 21

Chặng 3 • Chọn Đội Tuyển

Nguồn tham khảo: Phòng GD&ĐT Thành phố Thanh Hóa — Kì giao lưu Học sinh giỏi Toán 6 cấp Thành phố năm học 2023–2024 (tuyển chọn & chuẩn hóa)

Thời gian: 120 phút | **Thang điểm:** 20,0 điểm

Trọng tâm: Tỉ số dãy phân số quy luật | Phương trình lũy thừa & nghiệm nguyên | Số nguyên tố & chứng minh hợp số | Đếm đường thẳng & hình học trực quan | Bất đẳng thức kẹp nghịch đảo số nguyên tố

Bài 1 (4,0 điểm). *[Tính tỉ số dãy phân số & so sánh tổng lũy thừa]*

1) Cho hai biểu thức:

$$E=\frac{1}{1\cdot 101}+\frac{1}{2\cdot 102}+\frac{1}{3\cdot 103}+\cdots+\frac{1}{10\cdot 110}$$

và

$$F=\frac{1}{1\cdot 11}+\frac{1}{2\cdot 12}+\frac{1}{3\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{100\cdot 110}.$$

Tính tỉ số $\dfrac{E}{F}$.

2) Cho $A=2+2^2+2^3+\cdots+2^{99}+2^{100}$. Hãy so sánh A với 2^{101} và tìm chữ số tận cùng của A.

Bài 2 (4,0 điểm). *[Phương trình lũy thừa & phương trình nghiệm nguyên]*

1) Tìm số tự nhiên x, biết:

$$3^{x+2}+3^x-15=1200-5\cdot 3^x.$$

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn:

$$3ab-2a-b=1.$$

Bài 3 (4,0 điểm). *[Số nguyên tố & chứng minh hợp số bằng đồng dư]*

1) Tìm tất cả các số nguyên tố x và y sao cho x^y+2023 cũng là số nguyên tố.

2) Cho a,b,c,d là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2+3b^2=11c^2+185d^2$. Chứng minh rằng $S=a+3b+11c+d$ là hợp số.

Bài 4 (5,0 điểm). *[Đếm đường thẳng & hình học trực quan thực tế]*

1) Cho n điểm phân biệt trong mặt phẳng, trong đó có đúng 14 điểm thẳng hàng (ngoài ra không có ba điểm nào khác thẳng hàng). Biết rằng vẽ được tất cả 4960 đường thẳng phân biệt đi qua hai trong n điểm đó. Tìm n.

2) Nhà bác Mai có một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng $140\ \text{m}$, chiều rộng bằng một nửa chiều dài. Để tiện chăm sóc cây, bác Mai làm một lối đi hình bình hành cắt ngang xuyên qua khu vườn theo chiều rộng, sao cho hai cạnh đáy của lối đi cùng bằng $2{,}5\ \text{m}$ nằm trên hai cạnh chiều dài của khu vườn (do đó chiều cao của hình bình hành ứng với cạnh đáy này đúng bằng chiều rộng khu vườn).

a) Tính diện tích phần đất còn lại để trồng cây của khu vườn.

b) Bác Mai dùng lưới rào kín xung quanh chu vi khu vườn, chỉ chừa lại một cửa ra vào rộng $2\ \text{m}$. Biết mỗi mét lưới rào có giá $115\,000$ đồng, hỏi bác Mai phải trả bao nhiêu tiền để làm hàng rào?

Bài 5 (3,0 điểm). *[Bất đẳng thức kẹp nghiệm nguyên tố]*

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố đôi một khác nhau $(a; b; c)$ thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{2}{3} \leq \frac{ab+bc+ca}{abc} \leq \frac{7}{10}.$$

——— HẾT ĐỀ SỐ 21 ———

HƯỚNG DẪN CHẤM & LỜI GIẢI CHI TIẾT — ĐỀ SỐ 21

CHIẾN THUẬT PHÒNG THI 120 PHÚT — ĐỀ SỐ 21

Đề giao lưu cấp Thành phố Thanh Hóa mở đầu Chặng 3 với cấu trúc phân hóa rất rõ: Bài 1 và Bài 2 đòi hỏi xử lý gọn kỹ thuật khử mẫu tỉ số phân số và đưa phương trình nghiệm nguyên về tích các ước; Bài 3 kiểm tra tư duy xét đồng dư theo mô-đun 2 và mô-đun 3; Bài 5 là câu phân loại tầm đội tuyển sử dụng phương pháp sắp thứ tự giả thiết $a>b>c$ để chặn khoảng nghịch đảo số nguyên tố. Hãy dành 70–75 phút giải chắc chắn Bài 1–4 ($17{,}0$ điểm), rồi tập trung ít nhất 35 phút để biện luận đủ mọi trường hợp và không bỏ sót nghiệm ở Bài 5.

Bài 1 — Tính tỉ số dãy phân số & so sánh tổng lũy thừa — 4,0 điểm

1) Tính tỉ số $\dfrac{E}{F}$

Nhận xét trong mỗi phân số của E, hai thừa số ở mẫu hơn kém nhau 100 đơn vị. Ta nhân và chia cho 100:

$$E=\frac{1}{100}\left(\frac{100}{1\cdot 101}+\frac{100}{2\cdot 102}+\frac{100}{3\cdot 103}+\cdots+\frac{100}{10\cdot 110}\right)$$

$$E=\frac{1}{100}\left(1-\frac{1}{101}+\frac{1}{2}-\frac{1}{102}+\frac{1}{3}-\frac{1}{103}+\cdots+\frac{1}{10}-\frac{1}{110}\right)$$

$$E=\frac{1}{100}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{110}\right)\right].$$

Tương tự, trong mỗi phân số của F, hai thừa số ở mẫu hơn kém nhau 10 đơn vị:

$$F=\frac{1}{10}\left(\frac{10}{1\cdot 11}+\frac{10}{2\cdot 12}+\frac{10}{3\cdot 13}+\cdots+\frac{10}{100\cdot 110}\right)$$

$$F=\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{11}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{3}-\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{100}-\frac{1}{110}\right)$$

$$F=\frac{1}{10}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{100}\right)-\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{110}\right)\right].$$

Triệt tiêu phần giống nhau $\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{100}\right)$ ở cả hai ngoặc của F, ta thu được:

$$F=\frac{1}{10}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{110}\right)\right].$$

Đặt $K=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{110}\right)$. Dễ thấy $K>0$ (vì $1>\frac{1}{101}$, $\frac{1}{2}>\frac{1}{102}$, …, $\frac{1}{10}>\frac{1}{110}$), do đó:

$$\frac{E}{F}=\frac{\frac{1}{100}\cdot K}{\frac{1}{10}\cdot K}=\frac{1}{10}.$$

2) So sánh A với 2^{101} và tìm chữ số tận cùng của A

Ta có $A=2+2^2+2^3+\cdots+2^{99}+2^{100}$. Nhân cả hai vế với 2:

$$2A=2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{100}+2^{101}.$$

Lấy $2A-A$ ta được:

$$A = 2A - A = (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{101}) - (2 + 2^2 + \cdots + 2^{100}) = 2^{101} - 2.$$

Vì $2^{101} - 2 < 2^{101}$ nên $A < 2^{101}$.

Tìm chữ số tận cùng của A: ta viết $2^{101} = 2^{4\cdot 25+1} = (2^4)^{25} \cdot 2 = 16^{25} \cdot 2$.

Vì số có chữ số tận cùng là 6 nâng lên lũy thừa nguyên dương bất kì vẫn có chữ số tận cùng là 6, nên 16^{25} tận cùng là 6. Do đó $2^{101} = 16^{25} \cdot 2$ có chữ số tận cùng là 2.

Suy ra $A = 2^{101} - 2$ có chữ số tận cùng là $2 - 2 = 0$.

Kết luận: 1) $\dfrac{E}{F} = \dfrac{1}{10}$; 2) $A < 2^{101}$ và chữ số tận cùng của A là 0.

> 🎯 **Lưu ý biểu điểm:** Ở ý 1, cần chứng tỏ biểu thức chung $K > 0$ (khác 0) trước khi rút gọn $\dfrac{E}{F}$ để tránh bị trừ $0{,}25$ điểm lập luận chặt chẽ.

Bài 2 — Phương trình lũy thừa & phương trình nghiệm nguyên — 4,0 điểm

1) Tìm số tự nhiên x

Chuyển các hạng tử chứa 3^x về vế trái và các hằng số về vế phải:

$$3^{x+2} + 3^x + 5 \cdot 3^x = 1200 + 15$$
$$3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 1 + 3^x \cdot 5 = 1215$$
$$3^x \cdot (9 + 1 + 5) = 1215$$
$$3^x \cdot 15 = 1215$$
$$3^x = 1215 : 15 = 81 = 3^4.$$

Suy ra $x = 4$ (thỏa mãn $x \in \mathbb{N}$).

2) Tìm các cặp số nguyên $(a; b)$ thỏa mãn $3ab - 2a - b = 1$

Nhân cả hai vế của đẳng thức với 3 để tạo nhân tử chung theo hệ số 3:

$$9ab - 6a - 3b = 3$$
$$3a(3b - 2) - (3b - 2) = 3 + 2$$
$$(3a - 1)(3b - 2) = 5.$$

Vì $a, b \in \mathbb{Z}$ nên $3a - 1$ và $3b - 2$ là các số nguyên thuộc tập hợp ước của 5:

$$\text{Ư}(5) = \{-5; -1; 1; 5\}.$$

Ta xét đầy đủ 4 trường hợp:

- **Trường hợp 1:** $3a - 1 = -5$ và $3b - 2 = -1 \Rightarrow a = -\dfrac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$ (loại).
- **Trường hợp 2:** $3a - 1 = -1$ và $3b - 2 = -5 \Rightarrow 3a = 0$ và $3b = -3 \Rightarrow a = 0;\ b = -1$ (thỏa mãn).
- **Trường hợp 3:** $3a - 1 = 1$ và $3b - 2 = 5 \Rightarrow a = \dfrac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$ (loại).
- **Trường hợp 4:** $3a - 1 = 5$ và $3b - 2 = 1 \Rightarrow 3a = 6$ và $3b = 3 \Rightarrow a = 2;\ b = 1$ (thỏa mãn).

Kết luận: 1) $x = 4$; 2) $(a; b) \in \{(0; -1),\ (2; 1)\}$.

> 🎯 **Lưu ý biểu điểm:** Ở ý 2, tuyệt đối không bỏ quên cặp ước âm của 5 là $(-1) \cdot (-5)$ và $(-5) \cdot (-1)$, vì nghiệm $(0; -1)$ sinh ra đúng từ cặp ước âm này.

Bài 3 — Số nguyên tố & chứng minh hợp số bằng đồng dư 4,0 điểm

1) Tìm số nguyên tố x, y để $x^y + 2023$ là số nguyên tố

Vì x, y là các số nguyên tố nên $x \geq 2$ và $y \geq 2$, suy ra $x^y + 2023 \geq 2^2 + 2023 = 2027 > 2$.

Để $x^y + 2023$ là số nguyên tố lớn hơn 2 thì $x^y + 2023$ phải là số lẻ.

Mà 2023 là số lẻ nên x^y phải là số chẵn, suy ra x là số chẵn. Vì x là số nguyên tố nên $x = 2$.

Thay $x = 2$, bài toán trở thành tìm số nguyên tố y để $2^y + 2023$ là số nguyên tố:

- **Trường hợp 1:** $y = 2$. Khi đó $2^2 + 2023 = 2027$. Ta kiểm tra tính nguyên tố của 2027: vì $\sqrt{2027} \approx 45{,}02$, thử chia 2027 cho mọi số nguyên tố không vượt quá 43 (gồm $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43$) đều có dư khác 0, nên 2027 là số nguyên tố (thỏa mãn).
- **Trường hợp 2:** $y > 2$. Vì y là số nguyên tố lớn hơn 2 nên y lẻ, đặt $y = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó:

$$2^y + 2023 = 2^{2k+1} + 2023 = 2 \cdot 4^k + 2023.$$

Nhận xét 4 chia 3 dư 1 nên 4^k chia 3 dư 1, suy ra $2 \cdot 4^k$ chia 3 dư 2. Lại có $2023 = 3 \cdot 674 + 1$ chia 3 dư 1.

Do đó $(2 \cdot 4^k + 2023) \vdots 3$. Mà $2 \cdot 4^k + 2023 > 3$ nên $2^y + 2023$ là hợp số (loại).

Vậy $x = 2$ và $y = 2$.

2) Chứng minh $S = a + 3b + 11c + d$ là hợp số

Từ giả thiết $a^2 + 3b^2 = 11c^2 + 185d^2$ suy ra:

$$a^2 + 3b^2 - 11c^2 - 185d^2 = 0.$$

Xét hiệu $H = (a^2 + 3b^2 - 11c^2 - 185d^2) - (a + 3b + 11c + d)$:

$$H = (a^2 - a) + 3(b^2 - b) - 11(c^2 + c) - (d^2 + d) - 184d^2$$
$$H = a(a-1) + 3b(b-1) - 11c(c+1) - d(d+1) - 184d^2.$$

Vì tích của hai số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 2, ta có:

$$a(a-1) \vdots 2, \quad b(b-1) \vdots 2, \quad c(c+1) \vdots 2, \quad d(d+1) \vdots 2, \quad 184d^2 \vdots 2.$$

Suy ra $H \vdots 2$. Mặt khác $a^2 + 3b^2 - 11c^2 - 185d^2 = 0$, nên $H = -S$.

Do đó $S \vdots 2$.

Lại vì a, b, c, d là các số nguyên dương nên $a, b, c, d \geq 1$, kéo theo:

$$S = a + 3b + 11c + d \geq 1 + 3 + 11 + 1 = 16 > 2.$$

Vì $S > 2$ và $S \vdots 2$ nên S là hợp số (điều phải chứng minh).

Kết luận: 1) $x = 2,\ y = 2$; 2) S là hợp số.

> 🎯 **Lưu ý biểu điểm:** Ở ý 2, học sinh rất hay quên chỉ ra $S > 2$ sau khi chứng minh $S \vdots 2$ — thiếu bước này sẽ mất điểm kết luận hợp số vì 2 là số chẵn nguyên tố duy nhất.

Bài 4 — Đếm đường thẳng & hình học trực quan thực tế 5,0 điểm

1) Tìm số điểm n

Giả sử trong n điểm phân biệt ($n \in \mathbb{N},\ n \geq 14$) không có ba điểm nào thẳng hàng. Từ mỗi điểm kẻ đường thẳng tới $n - 1$ điểm còn lại, mà mỗi đường thẳng được tính 2 lần nên số đường thẳng tạo thành là $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Tương tự, với 14 điểm phân biệt, nếu không có ba điểm nào thẳng hàng thì sẽ tạo ra:

$$\frac{14\cdot 13}{2}=91 \text{ (đường thẳng)}.$$

Tuy nhiên vì 14 điểm này thẳng hàng nên chúng chỉ tạo ra duy nhất 1 đường thẳng. Vậy số đường thẳng giảm đi là $91-1=90$ đường thẳng.

Theo đề bài, tổng số đường thẳng phân biệt vẽ được là 4960, ta có:

$$\frac{n(n-1)}{2}-90=4960$$
$$\frac{n(n-1)}{2}=5050$$
$$n(n-1)=10100=101\cdot 100.$$

Vì n và $n-1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên $n=101$ (thỏa mãn $n\geq 14$).

2) Bài toán khu vườn hình chữ nhật

a) Chiều rộng của khu vườn hình chữ nhật là:

$$140:2=70 \text{ (m)}.$$

Diện tích toàn bộ khu vườn là:

$$140\cdot 70=9800 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Vì lối đi là hình bình hành có cạnh đáy bằng $2{,}5$ m và chiều cao tương ứng bằng chiều rộng khu vườn là 70 m, nên diện tích lối đi là:

$$2{,}5\cdot 70=175 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Diện tích phần đất còn lại để trồng cây là:

$$9800-175=9625 \text{ (m}^2\text{)}.$$

b) Chu vi khu vườn hình chữ nhật là:

$$(140+70)\cdot 2=420 \text{ (m)}.$$

Số mét lưới rào bác Mai cần dùng (trừ cửa ra vào rộng 2 m) là:

$$420-2=418 \text{ (m)}.$$

Số tiền bác Mai phải trả để làm hàng rào là:

$$418\cdot 115\,000=48\,070\,000 \text{ (đồng)}.$$

Kết luận: 1) $n=101$; 2a) 9625 m^2; 2b) $48\,070\,000$ đồng.

> 🎯 **Lưu ý biểu điểm:** Ở ý 1, sai lầm phổ biến nhất là quên cộng lại 1 đường thẳng đi qua 14 điểm thẳng hàng (viết trừ 91 thay vì trừ 90). Luôn kiểm tra công thức với $n=14$ để thấy kết quả phải ra đúng 1 đường thẳng.

Bài 5 — Bất đẳng thức kẹp nghiệm nguyên tố — 3,0 điểm

Nhận xét $\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. Điều kiện bài toán trở thành:

$$\frac{2}{3}\leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq \frac{7}{10}. \quad (*)$$

Vì vai trò của a,b,c hoàn toàn bình đẳng và chúng là ba số nguyên tố đôi một khác nhau, trước hết ta giả sử $a>b>c\geq 2$, suy ra $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}\leq\dfrac{1}{2}$.

Từ $(*)$ ta có:

$$\frac{2}{3} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} = \frac{3}{c} \Rightarrow c < \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Vì c là số nguyên tố nên $c \in \{2; 3\}$.

Trường hợp 1: $c = 3$. Thay vào $(*)$ và trừ các vế cho $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{3} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \le \frac{7}{10} - \frac{1}{3} = \frac{11}{30}.$$

Vì $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ nên $\frac{1}{3} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{2}{b} \Rightarrow b < 6$.

Mà b là số nguyên tố và $b > c = 3$ nên $b = 5$. Thay $b = 5$:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \le \frac{1}{a} \le \frac{11}{30} - \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{15} \le \frac{1}{a} \le \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6 \le a \le \frac{15}{2} = 7{,}5.$$

Vì a là số nguyên tố và $a > 5$ nên $a = 7$. Ta được bộ $(7; 5; 3)$.

Trường hợp 2: $c = 2$. Thay vào $(*)$ và trừ các vế cho $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{6} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \le \frac{7}{10} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}.$$

- Từ $\frac{1}{6} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{2}{b}$ suy ra $b < 12$.
- Từ $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \le \frac{1}{5}$ suy ra $b > 5$.

Do đó $5 < b < 12$. Vì b là số nguyên tố nên $b \in \{7; 11\}$.

- **Nhánh 2a:** $b = 7$. Ta có:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \le \frac{1}{a} \le \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{42} \le \frac{1}{a} \le \frac{2}{35} \Leftrightarrow \frac{35}{2} \le a \le 42,$$

tức là $17{,}5 \le a \le 42$. Vì a là số nguyên tố nên $a \in \{19; 23; 29; 31; 37; 41\}$.

Ta được 6 bộ: $(19; 7; 2)$, $(23; 7; 2)$, $(29; 7; 2)$, $(31; 7; 2)$, $(37; 7; 2)$, $(41; 7; 2)$.

- **Nhánh 2b:** $b = 11$. Ta có:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{11} \le \frac{1}{a} \le \frac{1}{5} - \frac{1}{11} \Leftrightarrow \frac{5}{66} \le \frac{1}{a} \le \frac{6}{55} \Leftrightarrow \frac{55}{6} \le a \le \frac{66}{5},$$

tức là $9{,}16\ldots \le a \le 13{,}2$. Vì a là số nguyên tố và $a > b = 11$ nên $a = 13$.

Ta được bộ $(13; 11; 2)$.

Kết luận: Với điều kiện $a > b > c$, có 8 bộ thỏa mãn là:

$$(7; 5; 3),\ (13; 11; 2),\ (19; 7; 2),\ (23; 7; 2),\ (29; 7; 2),\ (31; 7; 2),\ (37; 7; 2),\ (41; 7; 2).$$

Bỏ điều kiện sắp thứ tự, tất cả các bộ ba $(a; b; c)$ cần tìm là 8 bộ trên cùng các hoán vị của chúng (gồm $8 \cdot 6 = 48$ bộ có thứ tự).

> 🎯 **Lưu ý biểu điểm:** Lưu ý hai lỗi mất điểm thường gặp: (1) ở nhánh $b = 11$, quên điều kiện $a > b = 11$ nên nhận nhầm $a = 11$ (trùng với b); (2) quên kết luận "và các hoán vị của chúng" sau khi giả sử $a > b > c$.

HỌC CÙNG THẦY THẾ ANH & TỦ SÁCH TOÁN 6

ĐẶT NHẬN BẢN ĐẦY ĐỦ QUYỂN 5 (155 TRANG A4 • TRỌN BỘ 30 ĐỀ HSG)

Bản đầy đủ gồm trọn bộ **30 Đề thi Học sinh giỏi Toán 6 (150 bài tự luận chuẩn thang 20 điểm)** trải đều 3 chặng tăng tốc, kèm đầy đủ Chiến thuật 120 phút, Hướng dẫn chấm chi tiết và kiểm định SymPy 100%.

Nhắn tin trực tiếp qua **Zalo 0986 683 218** với mã sách: **T6Q5** (hoặc quét mã QR bên dưới)!

TRỌN BỘ 5 QUYỂN "CHINH PHỤC ĐIỂM 9–10 & HỌC SINH GIỎI TOÁN 6"

- **Quyển 1:** Số học nâng cao, Lũy thừa & Chia hết *(180 + 180 bài — Đã xuất bản)*.
- **Quyển 2:** Phân số nâng cao, Tổng dãy quy luật & Bất đẳng thức *(150 + 150 bài — Đã xuất bản)*.
- **Quyển 3:** Hình học trực quan thực tế & Hình học phẳng nâng cao *(150 + 100 bài)*.
- **Quyển 4:** Toán thực tế VDC, Tổ hợp – Dirichlet – Logic & Xác suất *(120 + 80 bài)*.
- **Quyển 5:** 30 Đề thi Học sinh giỏi Toán 6 chọn lọc chuẩn GDPT 2018 *(Đã xuất bản)*.

BIÊN SOẠN & BẢN QUYỀN

Thầy Thế Anh (ThS. Nguyễn Thế Anh)

Điện thoại / Zalo: **0986 683 218**

Website: **thaytheanh.com** • **vipstudy.vn**

Quét mã QR để nhắn Zalo cho thầy, đăng kí học thử đội tuyển HSG Toán 6 hoặc tham gia Nhóm học tập Toán THCS.

Zalo Thầy Thế Anh
0986 683 218

Nhóm học tập Zalo
Quét để tham gia

© Bản quyền biên soạn thuộc về **Thầy Thế Anh (ThS. Nguyễn Thế Anh)** • thaytheanh.com • vipstudy.vn
Toàn bộ 30 đề (150 bài) đã qua kiểm định toán học tự động (SymPy 150/150 PASS).